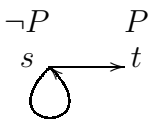
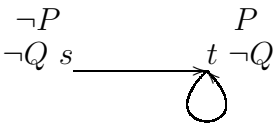
T-79.146 **Kevät 2002**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 4
Ratkaisut

1. $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s\rangle,\ \langle s, t\rangle\}$, $v(s, P) = \text{false}$, ja $v(t, P) = \text{true}$.



   $\mathcal{M} \models \Box P \to P$ pätee, ja $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond\neg P$ pätee myös, koska $\langle s, s\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s \Vdash \neg P$. Koska kuitenkin $\mathcal{M}, t \Vdash P$ ja $\langle s, t\rangle \in R$, niin $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\neg P$, mistä edelleen seuraa, että $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\Box\neg P$. Siis $\mathcal{M}$ on vastaesimerkki.

2. $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle, \langle t, t\rangle\}$, $v(s, P) = v(s, Q) = v(t, Q) = \text{false}$, ja $v(t, P) = \text{true}$.



   $\mathcal{M} \models \Diamond P$ pätee, ja $\mathcal{M}, s \Vdash P \leftrightarrow Q$ pätee myös. Edelleen $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$ pätee. Koska kuitenkin t on ainoa s:stä saavutettavissa oleva maailma ja $\mathcal{M}, t \nVdash Q$, ei $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond Q$ ole voimassa, joten $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P \to \Diamond Q$. Siis $\mathcal{M}$ on vastaesimerkki.

3. Oletetaan, että

$$\Sigma \cup \{P\} \not\models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow Q.$$

   Silloin on olemassa $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ siten, että

$$\mathcal{M} \models \Sigma \cup \{P\}$$

   ja

$$\exists s \in S: \quad \forall \varphi \in \Upsilon : \mathcal{M}, s \Vdash \varphi, \text{ mutta } \mathcal{M}, s \nVdash Q.$$

   Erityisesti $\mathcal{M}, t \Vdash P$ kaikilla $t \in S$, joten

$$\mathcal{M}, s \Vdash P \wedge \Box P \wedge \Box\Box P \wedge \Box\Box\Box P.$$

   Koska myös $\mathcal{M} \models \Sigma$ pätee, seuraa, että

$$\Sigma \not\models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P \wedge \Box P \wedge \Box\Box P \wedge \Box\Box\Box P \to Q.$$

4. a) Oletetaan, että kehykselle $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$ pätee

$$\mathcal{F} \models \Box P \rightarrow \Diamond P.$$

Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ kehykseen $\mathcal{F}$ perustuva malli, ja olkoon $s \in S$ jokin mallin maailma. Jos

$$\mathcal{M}, s \nVdash \Box P,$$

niin

$$\exists t \in S : \langle s, t \rangle \in R \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, t \nVdash P.$$

Toisaalta, jos

$$\mathcal{M}, s \Vdash \Box P,$$

seuraa, että

$$\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond P,$$

joten on oltava

$$\exists t \in S : \langle s, t \rangle \in R \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, t \Vdash P.$$

Molemmissa tapauksissa siis todetaan, että maailmalla s täytyy olla seuraaja R-relaatiossa. Koska s voidaan valita vapaasti, seuraa, että kehys $\mathcal{F}$ on sarjallinen.

b) Oletetaan, että kehys $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$ on euklidinen. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ kehykseen $\mathcal{F}$ perustuva malli ja $s \in S$ jokin sen maailma, jolle pätee $\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box P$. Silloin

$$\mathcal{M}, s \nVdash \Box P,$$

joten

$$\exists t \in S : \langle s, t \rangle \in R \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, t \nVdash P.$$

Oletetaan, että $\langle s, u \rangle \in R$. Koska $\langle s, t \rangle \in R$, kehyksen euklidisuudesta seuraa, että $\langle u, t \rangle \in R$. Siis

$$\mathcal{M}, u \nVdash \Box P,$$

ja

$$\mathcal{M}, u \Vdash \neg\Box P.$$

Koska u on mielivaltainen, $\mathcal{M}, s \Vdash \Box\neg\Box P$, ja on todistettu

$$\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box P \rightarrow \Box\neg\Box P.$$

Siten

$$\mathcal{M} \models \neg\Box P \rightarrow \Box\neg\Box P,$$

ja koska $\mathcal{M}$ on mielivaltainen,

$$\mathcal{F} \models \neg\Box P \rightarrow \Box\neg\Box P.$$

5. Oletetaan, että $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$ on refleksiivinen ja euklidinen. Jos sRt pätee, niin refleksiivisyyden perusteella myös sRs pätee. Euklidisuudesta seuraa nyt, että myös tRs pätee, joten kehys on symmetrinen.

   Oletetaan sitten, että sRt ja tRu ovat voimassa. Symmetrisyyden perusteella tRs pätee, ja euklidisuudesta puolestaan seuraa, että sRu pätee. Kehys on siis transitiivinen.