T-79.146 **Kevät 2002**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 3
Ratkaisut

1. a) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s\}$, $R = \varnothing$, ja $v(s, A) = \text{false}$.

$$\mathcal{M}, s \Vdash \Box A, \quad \text{mutta} \quad \mathcal{M}, s \nVdash A.$$

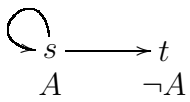
Siis $\mathcal{M}, s \nVdash \Box A \to A$.

b) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle,\ \langle t, s\rangle\}$, $v(s, A) = \text{false}$, ja $v(t, A) = \text{true}$.

$$\neg A \ s \rightleftarrows t \ A$$

$\mathcal{M}, s \Vdash \Box A$, mutta $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\Box A$, koska $\mathcal{M}, t \nVdash \Box A$. Täten $\mathcal{M}, s \nVdash \Box A \to \Box\Box A$.

c) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s\rangle, \langle s, t\rangle\}$, $v(s, A) = \text{true}$, $v(t, A) = \text{false}$.



$\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A$, koska $\langle s, s\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s \Vdash A$. $\mathcal{M}, s \Vdash \Box A$ ei kuitenkaan päde, koska $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \nVdash A$. Siis $\mathcal{M}, s \nVdash \Diamond A \to \Box A$.

d) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle\}$, $v(s, A) = v(t, A) = \text{false}$.

$$\neg A \ s \longrightarrow t \ \neg A$$

$\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box A$, koska $\mathcal{M}, s \nVdash \Box A$. $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\neg\Box A$, koska $\mathcal{M}, t \Vdash \Box A$. Siis $\mathcal{M}, s \nVdash \neg\Box A \to \Box\neg\Box A$.

2. a) Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$.
($\Rightarrow$) Oletetaan, että $\Diamond\top$ on tosi mallissa. Tällöin on olemassa maailma $s \in S$, jolle pätee $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond\top$. Seuraa, että on olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash \top$. Edelleen päätellään, että

$$\text{jos} \quad \mathcal{M}, s \Vdash \Box A, \quad \text{niin silloin} \quad \mathcal{M}, t \Vdash A,$$

ja siksi

$$\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A.$$

Siis jos $\mathcal{M}, s \Vdash \Box A$, niin silloin myös $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A$. Siten $\mathcal{M}, s \Vdash \Box A \to \Diamond A$, eli myös $\Box A \to \Diamond A$ on tosi mallissa.

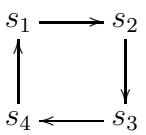
($\Leftarrow$) Oletetaan, että $\Box A \to \Diamond A$ toteutuu mallin $\mathcal{M}$ maailmassa $s \in S$. Jos on olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t\rangle \in R$, niin

$$\mathcal{M}, t \Vdash \top, \quad \text{ja tällöin} \quad \mathcal{M}, s \Vdash \Diamond\top.$$

Ellei näin ole, niin $\mathcal{M}, s \Vdash \Box A$, ja silloin on myös oltava oletuksen perusteella $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A$. Tästä kuitenkin seuraa, että on olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t\rangle \in R$ (ja $\mathcal{M}, t \Vdash A$), mikä johtaa ristiriitaan.

b) $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$, $S = \{s\}$ ja $R = \varnothing$. Koska tässä kehyksessä ei ole olemassa maailmaa $t \in S$ siten, että $\langle s, t\rangle \in R$, seuraa, että $\mathcal{F}, s \Vdash \Box\bot$ pätee. Koska s on $\mathcal{F}$:n ainoa maailma, $\Box\bot$ on pätevä kehyksessä $\mathcal{F}$.

3. $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$:



$\mathcal{F}' = \langle S', R'\rangle$, missä $S' = \{r_1, r_2\}$ ja $R' = \{\langle r_1, r_2\rangle,\ \langle r_2, r_1\rangle\}$:

Muodostetaan kuvaus $f : S \to S'$:

$$f(s_1) = f(s_3) = r_1$$
$$f(s_2) = f(s_4) = r_2$$

Kuvaus f on p-morfismi, koska

1. f on surjektiivinen (esim. $r_1 = f(s_1)$ ja $r_2 = f(s_2)$)
2. $\forall s, t \in S$: jos sRt pätee, niin $f(s)R'f(t)$ pätee
   (Esimerkiksi paria $\langle s_1, s_2\rangle \in R$ vastaa pari $\langle f(s_1), f(s_2)\rangle = \langle r_1, r_2\rangle$, joka kuuluu relaatioon R'; loput relaation R parit voidaan tarkistaa vastaavasti.)
3. $\forall s \in S\ \forall t \in S'$: jos $f(s)R't$ pätee, niin on olemassa $u \in S$ siten, että sRu ja $f(u) = t$ pätee
   (Esimerkiksi $\langle r_2, r_1\rangle = \langle f(s_4), r_1\rangle \in R'$, ja havaitaan, että $s_1 \in S$, s_4Rs_1 ja $f(s_1) = r_1$; loput tapaukset vastaavasti.)

P-morfismiproposition perusteella seuraa, että

$$\text{jos } \mathcal{F} \models P, \quad \text{niin} \quad \mathcal{F}' \models P$$

kaikille lauseille P.