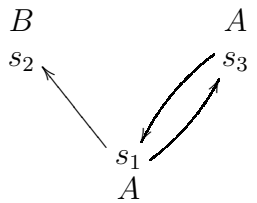
T-79.146 **Kevät 2002**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 2
Ratkaisut

1. a) Jos φ on tosi, niin agentti tietää φ:n.
   b) Jos agentti ei tiedä φ:tä, niin agentti tietää, että se ei tiedä φ:tä.
   c) Jos agentti tietää, että φ:stä seuraa ψ, niin silloin, jos agentti tietää φ:n, niin agentti tietää ψ:n.

2. a) $\varphi \rightarrow LK\varphi$
   b) $L\varphi \wedge L\psi \rightarrow L(\varphi \wedge \psi)$
   c) $K\varphi \rightarrow L\varphi$
   d) $LL\varphi \rightarrow L\varphi$

3. Olkoon $s =$ ”ulkona sataa”.
   a) $K_a K_b s \wedge \neg K_b K_a K_b s$
   b) $K_a(\neg K_b s \wedge \neg K_b \neg s)$
   c) $K_b(K_a s \vee K_a \neg s)$
   d) $\neg K_a K_b K_a s \wedge \neg K_a \neg K_b K_a s$

4. Tehtävässä annettu malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ on



   a) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box A$ ei päde, koska $\langle s_1, s_2\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s_2 \nVdash A$.
   b) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box\Diamond\top$ pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Diamond\top \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Diamond\top$$

   pätevät. Koska ei kuitenkaan ole olemassa maailmaa $s \in S$ siten, että $\langle s_2, s\rangle \in R$, seuraa, että $\mathcal{M}, s_2 \nVdash \Diamond\top$, ja edelleen, että $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box\Diamond\top$ ei päde.

c) $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Box\Box\bot$ pätee, joss $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box\Box\bot$, joka puolestaan pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box\bot \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\bot.$$

$\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\bot$ ei kuitenkaan päde, koska $\langle s_3, s_1\rangle \in R$, mutta $\mathcal{M}, s_1 \nVdash \bot$. Ei siis päde $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Box\Box\bot$.

d) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box(B \vee \Box\Diamond B)$ pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_2 \Vdash B \vee \Box\Diamond B \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash B \vee \Box\Diamond B$$

pätevät. $\mathcal{M}, s_2 \Vdash B \vee \Box\Diamond B$ pätee, koska $\mathcal{M}, s_2 \Vdash B$. $\mathcal{M}, s_3 \Vdash B \vee \Box\Diamond B$ pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_3 \Vdash B \quad \text{tai} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Diamond B.$$

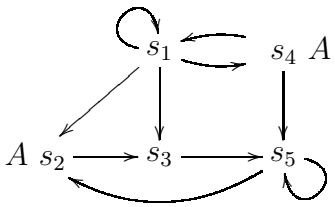
$\mathcal{M}, s_3 \Vdash B$ ei toteudu, koska $v(s_3, B) = \text{false}$. Nyt $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Diamond B$, joss $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond B$, joka pätee, koska $\langle s_1, s_2\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s_2 \Vdash B$. Siis $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box(B \vee \Box\Diamond B)$ pätee.

e) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond(\Box A \wedge \Box\neg A)$ pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box A \wedge \Box\neg A \quad \text{tai} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box A \wedge \Box\neg A.$$

Nähdään, että $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box A \wedge \Box\neg A$ pätee, koska sekä $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box A$ että $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box\neg A$, mikä seuraa siitä, että ei ole olemassa maailmaa $s \in S$ siten, että $\langle s_2, s\rangle \in R$.

5. Tehtävässä annettu malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ on



Tässä tehtävässä voitaisiin lauseen $\Diamond\Box\Diamond\Diamond A$ totuusarvot eri maailmoissa määrittää suoraan modaalilogiikan operaattorien $\Box$ ja $\Diamond$ määritelmiä hyväksi käyttäen kuten edellisessä tehtävässä. Voitaisiin siis esimerkiksi tutkia järjestyksessä, päteekö $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond\Box\Diamond\Diamond A$, $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Diamond\Box\Diamond\Diamond A$ jne., kunnes löydetään maailma, jossa annettu modaalilogiikan lause pätee.

Vaihtoehtoisesti voidaan kuitenkin lähteä liikkeelle annetun lauseen pienimmistä alilauseista (tässä tapauksessa atomilause A) ja johtaa niiden

totuusarvojen sekä modaalioperaattorien määritelmien avulla joidenkin suurempien alilauseiden totuusarvot kaikissa mallin maailmoissa. Tätä voidaan toistaa järjestyksessä yhä suuremmille alilauseille, kunnes lopulta saadaan selville mallin kaikki maailmat, joissa lause $\Diamond\Box\Diamond\Diamond A$ pätee. Vastaukseksi voidaan valita silloin jokin näistä maailmoista.

Koska $v(s_2, A) = v(s_4, A) = \text{true}$ ja muutoin $v(s, A) = \text{false}$, nähdään, että

$$\mathcal{M}, s_2 \Vdash A \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_4 \Vdash A$$

(ja muulloin $\mathcal{M}, s \nVdash A$). Koska nyt esim. $\langle s_1, s_2\rangle \in R$ ja $\langle s_5, s_2\rangle \in R$, niin modaalioperaattorin $\Diamond$ määritelmästä seuraa, että

$$\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond A \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_5 \Vdash \Diamond A,$$

ja muulloin $\mathcal{M}, s \nVdash \Diamond A$, koska maailmoilla s_2, s_3 ja s_4 ei (erikseen) ole R-relaatiossa sellaista seuraajamaailmaa s', jolle pätisi $\mathcal{M}, s' \Vdash A$.

Soveltamalla modaalioperaattorin $\Diamond$ määritelmää uudelleen päätellään, että

$$\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond\Diamond A, \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Diamond\Diamond A, \quad \mathcal{M}, s_4 \Vdash \Diamond\Diamond A \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_5 \Vdash \Diamond\Diamond A,$$

sillä kullakin maailmoista s_1, s_3, s_4 ja s_5 on seuraajamaailma, jossa $\Diamond A$ pätee (koska edellisen perusteella $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond A$, $\mathcal{M}, s_5 \Vdash \Diamond A$, ja esim. $\langle s_1, s_1\rangle \in R$, $\langle s_3, s_5\rangle \in R$, $\langle s_4, s_5\rangle \in R$ sekä $\langle s_5, s_5\rangle \in R$). Todetaan lisäksi, että s_1, s_3, s_4 ja s_5 ovat mallin *ainoat* maailmat, joissa lause $\Diamond\Diamond A$ pätee. (Lause $\Diamond\Diamond A$ ei päde s_2:ssa, sillä s_2:n ainoa seuraajamaailma mallissa on s_3, jolle ei kuitenkaan päde $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Diamond A$, mikä todettiin aiemmin yllä.)

Sovelletaan nyt operaattorin $\Box$ määritelmää, jolloin havaitaan, että

$$\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box\Diamond\Diamond A, \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Diamond\Diamond A \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_4 \Vdash \Box\Diamond\Diamond A,$$

sillä s_2, s_3, s_4, ovat mallin ainoat maailmat, joiden *kaikille* seuraajamaailmoille s pätee $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond\Diamond A$. (Esim. $\mathcal{M}, s_5 \Vdash \Box\Diamond\Diamond A$ *ei* ole voimassa, koska $\langle s_5, s_2\rangle \in R$, mutta $\mathcal{M}, s_2 \nVdash \Diamond\Diamond A$.)

Soveltamalla vielä kerran operaattorin $\Diamond$ määritelmää päätellään, että

$$\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond\Box\Diamond\Diamond A, \quad \mathcal{M}, s_2 \Vdash \Diamond\Box\Diamond\Diamond A \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_5 \Vdash \Diamond\Box\Diamond\Diamond A,$$

ja että nämä ovat ainoat tämän lauseen toteuttavat mallin maailmat. Tehtävän lause pätee siis mallin maailmoissa s_1, s_2 ja s_5.

Huomaa, että jokaisessa vaiheessa on tärkeää etsiä *kaikki* ne mallin maailmat, jossa ko. vaiheessa tutkittavana oleva alilause pätee, sillä muuten voidaan päätyä tilanteeseen, jossa jonkin muun alilauseen totuusarvoa ei voidakaan päätellä aiemmin laskettujen tulosten perusteella suoraan.

Jos esimerkiksi todettaisiin pelkästään, että $\mathcal{M}, s_2 \Vdash A$, $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond A$ (koska $\langle s_1, s_2 \rangle \in R$) ja viimein, että $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond\Diamond A$ (koska $\langle s_1, s_1 \rangle \in R$), ei nyt ainoastaan tämän tiedon avulla voida päätellä esim. alilauseen $\Box\Diamond\Diamond A$ totuusarvoa s_4:ssä, sillä se riippuu myös lauseen $\Diamond\Diamond A$ totuusarvosta s_5:ssä, joka on s_4:n seuraaja. (Erityisesti olisi nyt *virheellistä* päätellä, että $\mathcal{M}, s_4 \nVdash \Box\Diamond\Diamond A$ olisi voimassa; kuten edellä todettiin, lause $\Box\Diamond\Diamond A$ itse asiassa pätee maailmassa s_4.)