T-79.146 **Kevät 2002**

Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I

Laskuharjoitus 10

Ratkaisut

1. a) $P \wedge \mathbf{EF}Q$

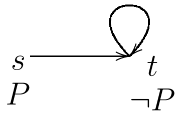
   b) $\mathbf{EF}(P \wedge \mathbf{AXAG}\neg P)$

   c) $\mathbf{AG}\big(P \rightarrow \mathbf{AX}(P \rightarrow \mathbf{EF}Q)\big)$

   d) $\big(P \rightarrow \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)\big) \wedge \big(\neg P \rightarrow \mathbf{AX}(P \vee \mathbf{AX}P)\big)$

   e) $\mathbf{AG}\big(P \rightarrow \mathbf{AG}(\neg Q \wedge \neg R)\big) \wedge \mathbf{AG}\big((Q \vee R) \rightarrow \mathbf{AG}\neg P\big)$

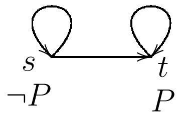
2. a) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle, \langle t, t\rangle\}$, $v(s, P) = \text{true}$ ja $v(t, P) = \text{false}$.



   $\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}P$ pätee, koska $(s, t, t, t, \dots)$ on ainoa s:stä alkava täysi polku, ja tällä polulla on tila t, jolle pätee $\mathcal{M}, t \models P$. Siten $\mathbf{AF}P$ on toteutuva.

   Jotta $\mathbf{GF}P$ toteutuisi mallissa $\mathcal{M}$, tulisi mallissa silloin olla olemassa täysi polku x, jolle $\mathcal{M}, x \models \mathbf{GF}P$, jolloin $\mathcal{M}, x^i \models \mathbf{F}P$ pätisi kaikille $i \geq 0$, eli kaikille $i \geq 0$ olisi olemassa $j \geq i$ siten, että $\mathcal{M}, x^j \models P$. Toisin sanoen P:n pitäisi toteutua polun x *äärettömän monessa* (äärettömässä) loppuosassa. Tällaisia polkuja ei kuitenkaan ole, sillä $\mathcal{M}$:n ainoat täydet polut ovat $(s, t, t, t, \dots)$ ja $(t, t, t, \dots)$, ja P pätee ainoastaan äärellisen monessa näiden polkujen äärettömässä loppuosassa. Lause $\mathbf{GF}P$ ei siis ole toteutuva mallissa $\mathcal{M}$.

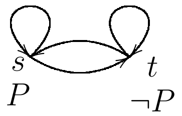
   b) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s\rangle, \langle s, t\rangle, \langle t, t\rangle\}$, $v(s, P) = \text{false}$ ja $v(t, P) = \text{true}$.



   $\mathcal{M}, s \models \mathbf{EFAG}P$ ja $\mathcal{M}, t \models \mathbf{EFAG}P$ pätevät, koska malli sisältää täydet polut $(s, t, t, t, \dots)$ ja $(t, t, t, \dots)$, joka kulkevat tilan t kautta, jolle selvästi pätee $\mathcal{M}, t \models \mathbf{AG}P$. Lause $\mathbf{EFAG}P$ on siis pätevä mallissa.

Lause $\mathbf{FG}P$ ei kuitenkaan ole pätevä mallissa, sillä täydellä polulla $(s, s, s, \ldots)$ ei ole ääretöntä loppuosaa x siten, että $\mathcal{M}, x^i \models P$ pätisi kaikille i (koska $v(s, P) = \text{false}$), jolloin siis $\mathcal{M}, (s, s, s \ldots) \not\models \mathbf{FG}P$.

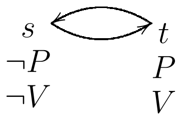
c) $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s\rangle, \langle s, t\rangle, \langle t, s\rangle, \langle t, t\rangle\}$, $v(s, P) = \text{true}$ ja $v(t, P) = \text{false}$.



Lause $\mathbf{FX}P$ on toteutuva, sillä mallissa on (esim.) täysi polku $x = (t, s, s, s, \ldots)$, jolle $\mathcal{M}, x \models \mathbf{X}P$ (koska $v(s, P) = \text{true}$), ja siten $\mathcal{M}, x \models \mathbf{FX}P$.

Lause $\mathbf{EFAX}P$ ei kuitenkaan ole toteutuva missään mallin tilassa: jos lause toteutuisi, olisi mallissa olemassa tilasta s tai t lähtevä tilojen s ja t kautta kulkeva täysi polku, joka kulkisi lauseen $\mathbf{AX}P$ toteuttavan tilan kautta. Tulisi siis olla joko $\mathcal{M}, s \models \mathbf{AX}P$ tai $\mathcal{M}, t \models \mathbf{AX}P$; kumpikaan näistä ei kuitenkaan toteudu, sillä sekä s:llä että t:llä on R-relaatiossa seuraaja t, jolle $\mathcal{M}, t \not\models P$.

3. a) $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle, \langle t, s\rangle\}$, $v(s, P) = v(s, V) = \text{false}$ ja $v(t, P) = v(t, V) = \text{true}$.



b) $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle, \langle t, s\rangle\}$, $v(t, P) = v(s, V) = \text{false}$ ja $v(s, P) = v(t, V) = \text{true}$.