T-79.146 **Kevät 2002**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 1
Ratkaisut

1. Lauselogiikan lauseelle voidaan etsiä malli taulumenetelmällä merkitsemällä lause taulun juureen todeksi ja muodostamalla sen jälkeen taulu.

   a)

$$
\begin{array}{c}
1.\ T\Big(\neg\big((P \to Q) \to (Q \to P)\big)\Big) \\
| \\
2.\ E\big((P \to Q) \to (Q \to P)\big)^{1.} \\
| \\
3.\ T\,(P \to Q)^{2.} \\
4.\ E\,(Q \to P)^{2.} \\
| \\
5.\ T\,(Q)^{4.} \\
6.\ E\,(P)^{4.} \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
7.\ E\,(P)^{3.} & 7.\ T\,(Q)^{3.}
\end{array}
\end{array}
$$

   Taulun juureen todeksi merkityn lauseen malli voidaan muodostaa valmiin taulun jonkin avoimen haaran avulla. Tässä tapauksessa molemmista taulun haaroista saadaan sama malli $M = \{Q\}$.

b)

$$1.\ T\Big(\big((P \vee \neg R) \leftrightarrow R\big) \wedge (P \to Q)\Big)$$

$$2.\ T\big((P \vee \neg R) \leftrightarrow R\big)^{1.}$$

$$3.\ T\,(P \to Q)^{1.}$$

$$4.\ T\,(P \vee \neg R)^{2.} \qquad\qquad 4.\ E\,(P \vee \neg R)^{2.}$$

$$5.\ T\,(R)^{2.} \qquad\qquad 5.\ E\,(R)^{2.}$$

$$6.\ T\,(P)^{4.} \qquad 6.\ T\,(\neg R)^{4.} \qquad 6.\ E\,(P)^{4.}$$

$$7.\ E\,(\neg R)^{4.}$$

$$7.\ E\,(P)^{3.} \qquad 7.\ T\,(Q)^{3.} \qquad 7.\ E\,(R)^{6.} \qquad 8.\ T\,(R)^{7.}$$

$$\otimes \qquad\qquad\qquad \otimes \qquad \otimes$$

Tauluun jää yksi avoin haara, josta saadaan lauseelle malli $M = \{P, Q, R\}$.

2. Annetun lauselogiikan lauseen loogista seuraavuutta jostakin lausejoukosta voidaan tutkia taulumenetelmällä merkitsemällä taulun juureen todeksi kaikki lausejoukossa olevat lauseet ja merkitsemällä annettu lause tauluun epätodeksi. Looginen seuraavuus pätee, jos näin saadaan muodostettua taulu, jonka kaikki haarat ovat suljettuja. Tehtävässä saadaan siten taulu

   1. $T\,(Q \to P)$
   2. $T\big(R \to (P \wedge Q)\big)$
   3. $T\big(P \to (Q \wedge R)\big)$
   4. $E\,(\neg Q)$
   5. $T\,(Q)^{4.}$
      - 6. $E\,(Q)^{1.}$ $\otimes$
      - 6. $T\,(P)^{1.}$
        - 7. $E\,(P)^{3.}$ $\otimes$
        - 7. $T\,(Q \wedge R)^{3.}$
          8. $T\,(Q)^{7.}$
          9. $T\,(R)^{7.}$
          - 10. $E\,(R)^{2.}$ $\otimes$
          - 10. $T\,(P \wedge Q)^{2.}$
            11. $T\,(P)^{10.}$
            12. $T\,(Q)^{10.}$

   Taulu ei sulkeudu, joten lause $\neg Q$ *ei* seuraa loogisesti tehtävässä annetusta lausejoukosta Σ. $\neg Q$:lle voidaan siten muodostaa vastamalli (ts. malli, jossa kaikki lausejoukon Σ lauseet toteutuvat, mutta jossa $\neg Q$ on epätosi) taulun jonkin avoimen haaran avulla. Tässä tapauksessa siis taulun (ainoasta) avoimesta haarasta saadaan lauseelle vastamalli $M = \{P, Q, R\}$.

3. Lauselogiikan lause α on konjunktiivisessa normaalimuodossa, jos se on muotoa $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_n$, missä jokainen lause β_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ on erikseen muotoa $l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_m$, ja jokainen l_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ on *literaali* (atomilause tai sen negaatio).

   Lauseen α disjunktiivinen normaalimuoto on puolestaan muotoa $\beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_n$, missä jokainen lause β_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ on nyt literaalien konjunktio (ts. jokainen β_i on erikseen muotoa $l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_m$ kaikilla

$i = 1, 2, \ldots, n)$.

Lauseen disjunktiivinen normaalimuoto saadaan etsimällä lauseen kaikki mallit taulumenetelmällä:

$$
\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{c}{1.\ T\big((P \to Q) \to (P \vee Q)\big)} \\
2.\ E\,(P \to Q)^{1.} & \multicolumn{2}{c}{2.\ T\,(P \vee Q)^{1.}} \\
\mid & & \\
3.\ T\,(P)^{2.} & 3.\ T\,(P)^{2.} & 4.\ T\,(Q)^{2.} \\
4.\ E\,(Q)^{2.} & &
\end{array}
$$

Keräämällä lauseen kaikki mallit taulun avoimista haaroista saadaan taulun juuressa olevalle lauseelle disjunktiivinen normaalimuoto

$$(P \wedge \neg Q) \vee P \vee Q,$$

joka voidaan vielä sieventää muotoon

$$P \vee Q.$$

Konjunktiivisen normaalimuodon ratkaisemiseksi muodostetaan ensin lauseen *negaation* disjunktiivinen normaalimuoto taulumenetelmällä, minkä jälkeen itse lauseen konjunktiivinen normaalimuoto saadaan tästä käyttämällä hyväksi de Morganin sääntöjä.

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{1.\ T\Big(\neg\big((P \to Q) \to (P \vee Q)\big)\Big)} \\
\multicolumn{2}{c}{\mid} \\
\multicolumn{2}{c}{2.\ E\big((P \to Q) \to (P \vee Q)\big)^{1.}} \\
\multicolumn{2}{c}{\mid} \\
\multicolumn{2}{c}{3.\ T\,(P \to Q)^{2.}} \\
\multicolumn{2}{c}{4.\ E\,(P \vee Q)^{2.}} \\
\multicolumn{2}{c}{\mid} \\
\multicolumn{2}{c}{5.\ E\,(P)^{4.}} \\
\multicolumn{2}{c}{6.\ E\,(Q)^{4.}} \\
7.\ E\,(P)^{3.} & 7.\ T\,(Q)^{3} \\
 & \otimes
\end{array}
$$

Lauseen negaation disjunktiiviseksi normaalimuodoksi saadaan taulun avoimesta haarasta

$$\neg\big((P \to Q) \to (P \vee Q)\big) \equiv \neg P \wedge \neg Q,$$

joten itse lauseen konjunktiivinen normaalimuoto on

$$(P \to Q) \to (P \vee Q) \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q) \equiv P \vee Q.$$

(Tässä tapauksessa siis lauseen disjunktiivinen ja konjunktiivinen normaalimuoto ovat samat. Tämä ei kuitenkaan päde yleisesti.)

4. a)

$$\begin{array}{c}
1.\ T\Big(\exists x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2) \wedge \forall x_1 \forall x_2 \big(P(x_1, x_2) \to P(x_2, x_1)\big)\Big) \\
| \\
2.\ T\big(\exists x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2)\big)^{1.} \\
3.\ T\Big(\forall x_1 \forall x_2 \big(P(x_1, x_2) \to P(x_2, x_1)\big)\Big)^{1.} \\
| \\
4.\ T\big(\exists x_2 P(c, x_2)\big)^{2.\, x_1/c} \\
| \\
5.\ T\big(P(c, d)\big)^{4.\, x_2/d} \\
| \\
6.\ T\Big(\forall x_2 \big(P(c, x_2) \to P(x_2, c)\big)\Big)^{3.\, x_1/c} \\
| \\
7.\ T\big(P(c, d) \to P(d, c)\big)^{6.\, x_2/d} \\
\diagup \qquad \diagdown \\
\begin{array}{cc}
8.\ E\big(P(c, d)\big)^{7.} & \quad 8.\ T\big(P(d, c)\big)^{7.} \\
\otimes &
\end{array}
\end{array}$$

Taulun avoimen haaran avulla voidaan määritellä rakenne (struktuuri) $\mathcal{A}$. Olkoon universumi

$$A = \{1, 2\},$$

ja määritellään

$$c^{\mathcal{A}} = 1, \qquad d^{\mathcal{A}} = 2 \quad \text{sekä} \quad P^{\mathcal{A}} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}.$$

Tarkistetaan, että lause on tosi rakenteessa. Koska esim. $\langle 1, 2\rangle = \langle c^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}\rangle \in P^{\mathcal{A}}$, niin

$$\mathcal{A} \models \exists x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2)$$

pätee. Myös

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \forall x_2 (P(x_1, x_2) \to P(x_2, x_1)),$$

on voimassa, koska

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &\models P(c,c) \to P(c,c),\\
\mathcal{A} &\models P(c,d) \to P(d,c),\\
\mathcal{A} &\models P(d,c) \to P(c,d) \text{ ja}\\
\mathcal{A} &\models P(d,d) \to P(d,d),
\end{aligned}$$

sillä $c^{\mathcal{A}} = 1, d^{\mathcal{A}} = 2, \langle c^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}\rangle = \langle 1,1\rangle \notin P^{\mathcal{A}}, \langle c^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}\rangle = \langle 1,2\rangle \in P^{\mathcal{A}}, \langle d^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}\rangle = \langle 2,1\rangle \in P^{\mathcal{A}}$ ja $\langle d^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}\rangle = \langle 2,2\rangle \notin P^{\mathcal{A}}$.

b) Tässä tapauksessa taulumenetelmän avulla ei saada aikaan valmista taulua, sillä tauluun ei muodostu yhtään äärellistä ristiriidatonta polkua, josta saataisiin lauseelle malli. Lauseelle voidaan kuitenkin muodostaa esimerkiksi seuraava malli:

Käytetään rakennetta $\mathcal{A}$, jonka universumi on $A = \{1\}$. Lisäksi tarvitaan vakiosymboli c ja predikaatti P siten, että

$$c^{\mathcal{A}} = 1, \quad \text{ja} \quad P^{\mathcal{A}} = \{\langle 1,1\rangle\}.$$

Tarkistetaan, että

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \exists x_2 P(x_1,x_2) \wedge \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P(x_1,x_2) \wedge P(x_2,x_3) \to P(x_1,x_3))$$

pätee. Koska universumissa on ainoastaan yksi alkio ($c^{\mathcal{A}} = 1$) ja $\langle 1,1\rangle \in P$ (eli $\mathcal{A} \models P(c,c)$),

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \exists x_2 P(x_1,x_2).$$

Samasta syystä

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P(x_1,x_2) \wedge P(x_2,x_3) \to P(x_1,x_3)),$$

koska

$$\mathcal{A} \models P(c,c) \wedge P(c,c) \to P(c,c).$$

5. a)

$$1.\ E\Big(\big(\forall x P(x) \land \forall x Q(x)\big) \to \forall x\big(P(x) \lor Q(x)\big)\Big)$$

$$|$$

$$2.\ T\big(\forall x P(x) \land \forall x Q(x)\big)^{1.}$$

$$3.\ E\Big(\forall x\big(P(x) \lor Q(x)\big)\Big)^{1.}$$

$$|$$

$$4.\ T\big(\forall x P(x)\big)^{2.}$$

$$5.\ T\big(\forall x Q(x)\big)^{2.}$$

$$|$$

$$6.\ E\big(P(c) \lor Q(c)\big)^{3.\,x/c}$$

$$|$$

$$7.\ E\big(P(c)\big)^{6.}$$

$$8.\ E\big(Q(c)\big)^{6.}$$

$$|$$

$$9.\ T\big(P(c)\big)^{4.\,x/c}$$

$$\otimes$$

b)

$$1.\ E\Big(\exists y\big(\exists x P(x) \to P(y)\big)\Big)$$

$$|$$

$$2.\ E\big(\exists x P(x) \to P(c)\big)^{1.\,y/c}$$

$$|$$

$$3.\ T\big(\exists x P(x)\big)^{2.}$$

$$4.\ E\,(P(c))^{2.}$$

$$|$$

$$5.\ T\big(P(d)\big)^{3.\,x/d}$$

$$|$$

$$6.\ E\big(\exists x P(x) \to P(d)\big)^{1.\,y/d}$$

$$|$$

$$7.\ T\big(\exists x P(x)\big)$$

$$8.\ E\big(P(d)\big)$$

$$\otimes$$