Perusteluoksia malleista

- Kehys = malli predikaattilogiikalle, jossa on yksi kaksipaikkainen predikaattisymboli (R).
- Propositionaalista modaalilogiikkaa voidaan käyttää kvantifioidun logiikan tilalla: predikaattilogiikan lauseelle P voidaan antaa vastaava modaalilause P' siten, että P on tosi mallissa täsmälleen, kun modaalilause P' on pätevä mallissa tulkittuna modaalilogiikan kehyksenä.
- Kuinka pitkälle modaalilogiikka riittää? (Minkälaisia predikaattilogiikan lauseita ei voida esittää modaalilogiikalla?)
- Tarkastellaan muutamaa pätevyyden säilyttävää operaatiota kehyksille (generoitu alikehys, pistevieras unioni ja p-morfismi), jotka antavat viitteitä modaalilogiikan ilmaisuvoiman rajoista.

Kehyksen ominaisuudet lauseina

Esimerkki. $\Box P \to P$ on pätevä kehyksessä $\langle S, R\rangle$ joss R on refleksiivinen ($\forall x R(x,x)$ on tosi).

($\Leftarrow$) Olkoon R refleksiivinen. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ kehykseen $\langle S, R\rangle$ perustuva malli ja $s \in S$.

Jos $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$, $\mathcal{M}, s \Vdash P$, koska sRs. Täten $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P \to P$.

($\Rightarrow$) Oletetaan, että R ei ole refleksiivinen kehyksessä $\langle S, R\rangle$. Tällöin on olemassa $s_0 \in S$, jolle $s_0 R s_0$ ei päde.

Olkoon $v(s, P) = \mathrm{true}$ jos $s_0 R s$ muutoin $v(s, P) = \mathrm{false}$. Nyt $v(s_0, P) = \mathrm{false}$.

Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$. Tällöin $\mathcal{M}, s_0 \Vdash \Box P$ mutta $\mathcal{M}, s_0 \nVdash P$.

Siis $\mathcal{M}, s_0 \nVdash \Box P \to P$.

Generoitu alikehys (I)

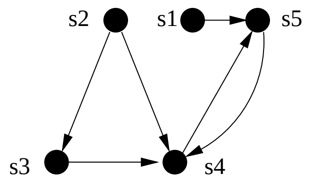
Määritelmä. Olkoon $\langle S, R\rangle$ kehys ja $S_0 \subseteq S$. S_0:n generoima alikehys on kehys $\langle S^*, R^*\rangle$, missä S^* on pienin R-suljettu S:n alijoukko, joka sisältää S_0:n ja R^* on R rajoitettuna joukolle S^* ($R^* = \{\langle s_1, s_2\rangle \in R \mid s_1, s_2 \in S^*\}$).

(S:n alijoukko H on R-suljettu, jos $t \in H$ aina kun $s \in H$ ja sRt).

Huom. S^* on niiden maailmojen joukko, jotka voidaan saavuttaa S_0:sta (transitiivisesti).

Määritelmä. Mallin $\langle S, R, v\rangle$ generoitu alimalli on malli $\langle S^*, R^*, v^*\rangle$, missä $\langle S^*, R^*\rangle$ on generoitu alikehys ja v^* on v rajoitettuna S^*:lle. Alikehys on generoitu, jos se on jonkun maailmojen joukon generoima.

Generoitu alikehys (II)



Yllä olevassa kehyksessä:

- joukon $\{s2\}$ generoima alikehys: tilat $\{s2, s3, s4, s5\}$ ja niiden väliset kaaret.
- joukon $\{s5\}$ generoima alikehys: tilat $\{s5, s4\}$ ja niiden väliset kaaret.
- joukon $\{s1, s3\}$ generoima alikehys: tilat $\{s1, s3, s5, s4\}$ ja niiden väliset kaaret.

Generoitu alikehys (III)

Propositio. Jos $\mathcal{M}^*$ on $\mathcal{M}$:n generoitu alimalli, niin jokaisessa $\mathcal{M}^*$:n maailmassa s ja jokaiselle lauseelle P: $\mathcal{M}, s \Vdash P$ joss $\mathcal{M}^*, s \Vdash P$.

Esimerkki. Olkoon $S = \{s, t_1, t_2\}$; $R = \{\langle t_1, t_2 \rangle\}$.

Joukon $\{s\}$ generoima alikehys on $S^* = \{s\}$; $R^* = \{\}$.

$\exists x \exists y R(x, y)$ on tosi kehyksessä $\langle S, R \rangle$.
$\exists x \exists y R(x, y)$ on epätosi kehyksessä $\langle S^*, R^* \rangle$.

Mutta kaikille lauseille P ja jokaiselle valuaatiolle v

$\langle S, R, v \rangle, s \Vdash P$ joss $\langle S^*, R^*, v^* \rangle, s \Vdash P$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ei ole lausetta P siten, että P on pätevä kehyksessä $\langle S, R \rangle$ joss R:lle pätee $\exists x \exists y R(x, y)$.

Kehyksien pistevieras unioni

Pistevieras unioni: 'kopiot' kehyksistä niin, etteivät maailmojen joukot leikkaa ja otetaan unioni maailmoista ja saavutettavuusrelaatioista.

Propositio. Lause P on pätevä kahden kehyksen pistevieraassa unionissa joss P on pätevä kummassakin kehyksessä.

Esimerkki. Olkoon $S = \{s\}$; $R = \{\langle s, s \rangle\}$.
Kehyksen $\langle S, R \rangle$ pistevieras unioni itsensä kanssa $\langle S, R \rangle \dot{\cup} \langle S, R \rangle = \langle S', R' \rangle$ missä $S' = \{s_1, s_2\}$; $R' = \{\langle s_1, s_1 \rangle, \langle s_2, s_2 \rangle\}$.

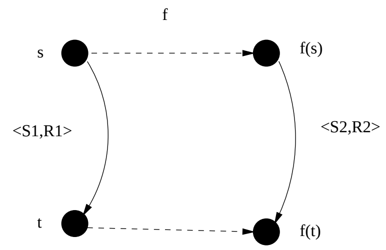
$\forall x \forall y R(x, y)$ on tosi kehyksessä $\langle S, R \rangle$.
$\forall x \forall y R(x, y)$ on epätosi kehyksessä $\langle S', R' \rangle$.
Mutta kaikille lauseille P: $\langle S, R \rangle \models P$ joss $\langle S', R' \rangle \models P$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ei ole lausetta P siten, että P on pätevä kehyksessä $\langle S, R \rangle$ joss R:lle pätee $\forall x \forall y R(x, y)$.

Kehysten p-morfismi (I)

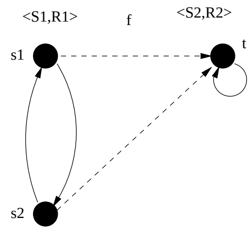
Määritelmä. Kuvaus f kehykseltä $\langle S_1, R_1 \rangle$ kehykselle $\langle S_2, R_2 \rangle$ on p-morfismi joss

1. f on kuvaus joukolta S_1 joukolle S_2 s.e. jokaiselle $s \in S_2$ olemassa $t \in S_1$, jolle $s = f(t)$.
2. kaikille $s, t \in S_1$, jos sR_1t, niin $f(s)R_2f(t)$ ja
3. kaikille $s \in S_1$ ja $u \in S_2$, jos $f(s)R_2u$, niin on olemassa $t \in S_1$ siten, että sR_1t ja $f(t) = u$.



Kehysten p-morfismi (II)

Esimerkki. Olkoon
$S_1 = \{s_1, s_2\}$;
$R_1 = \{\langle s_1, s_2 \rangle, \langle s_2, s_1 \rangle\}$ ja
$S_2 = \{t\}$; $R_2 = \{\langle t, t \rangle\}$.
Olkoon $f(s_1) = f(s_2) = t$.
Funktio f on p-morfismi.



Kehysten p-morfismi (III)

Propositio. Jos on olemassa p-morfismi kehykseltä $\langle S_1, R_1 \rangle$ kehykselle $\langle S_2, R_2 \rangle$, niin jokainen ensimmäisessä kehyksessä pätevä lause on pätevä myös toisessa kehyksessä.

Esimerkki. (Jatkuu)
$\forall x \neg R(x, x)$ on tosi kehyksessä $\langle S_1, R_1 \rangle$.
$\forall x \neg R(x, x)$ on epätosi kehyksessä $\langle S_2, R_2 \rangle$.

Kuitenkin jokaiselle lauseelle P:
jos P on pätevä kehyksessä $\langle S_1, R_1 \rangle$, niin P on pätevä kehyksessä $\langle S_2, R_2 \rangle$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ei ole lausetta P siten, että P on pätevä kehyksessä $\langle S, R \rangle$ joss R:lle pätee $\forall x \neg R(x, x)$.

Looginen seuraavuus (I)

$\Sigma \models P$:

- Lauselogiikka

  P on tosi jokaisessa mallissa, jossa Σ on tosi.

- Modaalilogiikka (useita mahdollisia tulkintoja)
  - Kaikille malleille pätee, että P on tosi jokaisessa mallin maailmassa, jossa Σ on tosi.
  - P on pätevä jokaisessa mallissa, jossa Σ on pätevä.
  - P on pätevä jokaisessa kehyksessä, jossa Σ on pätevä.

- Otetaan käyttöön looginen seuraus, joka yhdistää kaikki kolme tulkintaa

Looginen seuraavuus (II)

Määritelmä. Olkoon $\mathbf{L}$ joukko kehyksiä, Σ ja Υ lausejoukkoja ja P lause. Lause P seuraa loogisesti globaaleista premisseista Σ ja lokaaleista premisseista Υ kehyslogiikassa $\mathbf{L}$ ($\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$)

joss jokaiselle kehykselle $\langle S, R \rangle \in \mathbf{L}$, jokaiselle tähän kehykseen perustuvalle mallille $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, jossa kaikki Σ:n lauseet ovat päteviä, jokaiselle mahdolliselle maailmalle $s \in S$, jossa kaikki Υ:n lauseet ovat tosia, $\mathcal{M}, s \Vdash P$.

Esimerkki. Olkoon $\mathbf{L}$ kaikkien kehysten joukko.

Jos $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \emptyset \Longrightarrow P$, niin $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \emptyset \Longrightarrow \Box P$.

$\{P\} \models_{\mathbf{L}} \emptyset \Longrightarrow \Box P$

Mutta $\emptyset \not\models_{\mathbf{L}} \{P\} \Longrightarrow \Box P$.

Looginen seuraavuus (III)

Määritelmä. Jos $\mathbf{L}_1$ ja $\mathbf{L}_2$ ovat kaksi kehysjoukkoa ja $\mathbf{L}_2 \subseteq \mathbf{L}_1$, sanomme, että $\mathbf{L}_1$ on heikompi kuin $\mathbf{L}_2$ ja kirjoitamme $\mathbf{L}_1 \leq \mathbf{L}_2$.

Jos $\mathbf{L}_1$ on heikompi kuin $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1$-pätevät lauseet ovat $\mathbf{L}_2$-päteviä.

Teoreema. (Monotonisuus) Olkoon $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, $\Upsilon_1 \subseteq \Upsilon_2$ ja $\mathbf{L}_1 \leq \mathbf{L}_2$. Tällöin jos $\Sigma_1 \models_{\mathbf{L}_1} \Upsilon_1 \Longrightarrow P$, niin $\Sigma_2 \models_{\mathbf{L}_2} \Upsilon_2 \Longrightarrow P$.

Teoreema. (Korvattavuus) Olkoon Q ja Q' samat lauseet paitsi, että jossain paikoissa, joissa P on Q:n alilause, P' on Q':n alilause. Tällöin

$\Sigma \cup \{P \leftrightarrow P'\} \models_{\mathbf{L}} \emptyset \Longrightarrow Q \leftrightarrow Q'$.

Huom! $\{\} \not\models_{\mathbf{L}} \{P \leftrightarrow P'\} \Longrightarrow \Box P \leftrightarrow \Box P'$.

Deduktioteoreema (I)

Lauselogiikka: $\Sigma \cup \{Q\} \models P$ joss $\Sigma \models Q \to P$.

Teoreema. (Paikallinen deduktioteoreema)
$\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{Q\} \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow Q \to P$.

Määritelmä. Lauseelle P, $\Box^0 P = P$ ja $\Box^n P = \Box(\Box^{n-1} P)$.

Esim. $\Box^3 P = \Box\Box\Box P$.

Globaali deduktioteoreema:

$\Sigma \cup \{Q\} \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss jollekin n
$\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \ldots, \Box^n Q\} \Longrightarrow P$.

(Ei päde kaikille kehysjoukoille $\mathbf{L}$.)

Deduktioteoreema (II)

Teoreema. (Globaali deduktioteoreema I)
Jos, jollekin n, $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \ldots, \Box^n Q\} \Longrightarrow P$, niin
$\Sigma \cup \{Q\} \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Teoreema. (Globaali deduktioteoreema II)
Olkoon $\mathbf{L}$ joukko kehyksiä, joka on suljettu generoitujen alikehysten ja ultraproduktien suhteen. Tällöin jos $\Sigma \cup \{Q\} \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$, niin
$\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \ldots, \Box^n Q\} \Longrightarrow P$ jollekin n.

Teoreema. (Kompaktius) Olkoon $\mathbf{L}$ joukko kehyksiä, joka on suljettu ultraproduktien suhteen.
Jos $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$, niin on olemassa äärelliset joukot $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon_0 \subseteq \Upsilon$ siten, että $\Sigma_0 \models_{\mathbf{L}} \Upsilon_0 \Longrightarrow P$.

(Kurssilla ei käsitellä yo. ultraproduktiehtoa vaan annetaan jatkossa esimerkkejä logiikoista, joille se pätee).