**Tik-79.146** **Kevät 2001**
**Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I**
**Laskuharjoitus 9**
**Ratkaisut**

1.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\langle 1\rangle\neg(\Diamond P \to \Diamond\Diamond P)$ | | | | |
| 2. | $\langle 1\rangle\Diamond P$ | | | | (1) |
| 3. | $\langle 1\rangle\neg\Diamond\Diamond P$ | | | | (1) |
| 4. | $\langle 1,2\rangle P$ | | | | (2) |
| 5. | $\langle 1,2\rangle\neg\Diamond P$ | | | | (3) |
| 6. | $\langle 1,2\rangle\Box\neg P \to \neg P$ | | | | $(GP)$ |
| 7. | $\langle 1,2\rangle\neg\Box\neg P$ | (6) | 8. | $\langle 1,2\rangle\neg P$ | (6) |
| 9. | $\langle 1,2,3\rangle\neg\neg P$ | (7) | | $\otimes$ | |
| 10. | $\langle 1,2,3\rangle P$ | (9) | | | |
| 11. | $\langle 1,2,3\rangle\neg P$ | (5) | | | |
| | $\otimes$ | | | | |

2. Käännetään lause predikaattikalkyylimuotoon:

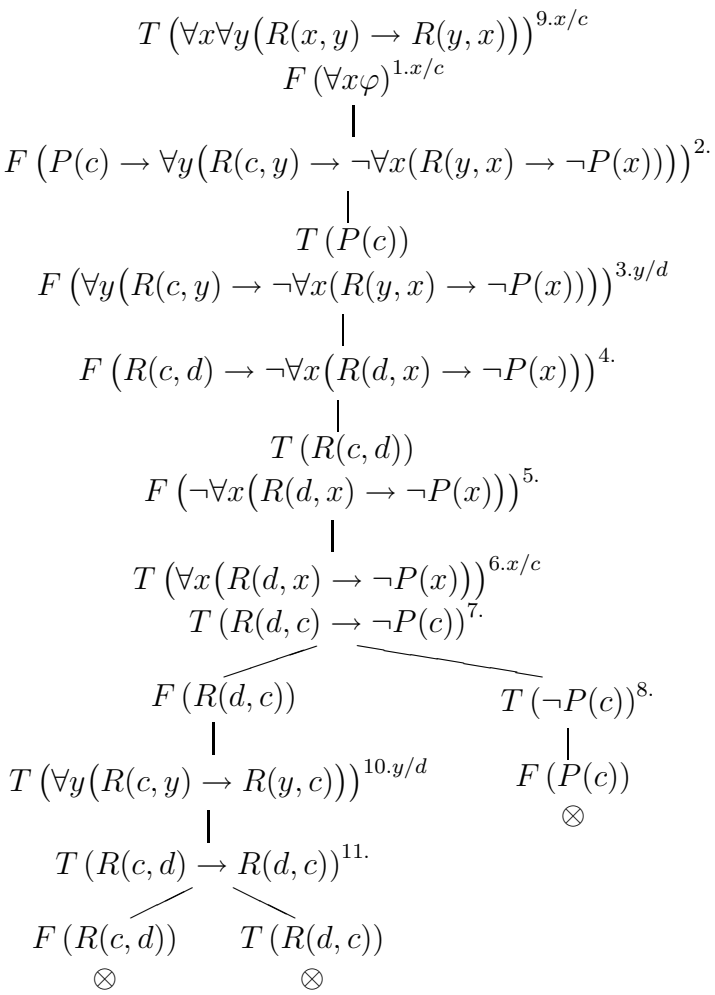
$$\begin{aligned}
\tau(P \to \Box\neg\Box\neg P, x) &= \tau(P,x) \to \tau(\Box\neg\Box\neg P, x) \\
&= P(x) \to \forall y\big(R(x,y) \to \tau(\neg\Box\neg P, y)\big) \\
&= P(x) \to \forall y\big(R(x,y) \to \neg\tau(\Box\neg P, y)\big) \\
&= P(x) \to \forall y\Big(R(x,y) \to \neg\forall x\big(R(y,x) \to \tau(\neg P, x)\big)\Big) \\
&= P(x) \to \forall y\Big(R(x,y) \to \neg\forall x\big(R(y,x) \to \neg\tau(P, x)\big)\Big) \\
&= P(x) \to \forall y\Big(R(x,y) \to \neg\forall x\big(R(y,x) \to \neg P(x)\big)\Big) \\
&= \varphi
\end{aligned}$$

Sovellettaessa predikaattikalkyylin taulumenetelmää lauseen pätevyyden osoittamiseksi asetetaan lause $\forall x\varphi$ taulun juureen epätodeksi. Kehyksen symmetrisyys ilmaistaan ottamalla tauluun mukaan lause

$$\forall x\forall y\big(R(x,y) \to R(y,x)\big),$$

joka merkitään tauluun todeksi.

Taulutodistus:



3. a) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_1 P$, koska $v(s_1, P) = v(s_2, P) = \mathit{true}$, ja
$\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_2 P$ ja $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_3 P$, koska $v(s_1, P) = \mathit{true}$ . Siten
$\mathcal{M}, s_1 \Vdash EP$.

b) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_2 EP$ ja $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_3 EP$, koska $\mathcal{M}, s_1 \Vdash EP$. Lisäksi
$\mathcal{M}, s_2 \Vdash K_1 P$, koska $v(s_1, P) = v(s_2, P) = \mathit{true}$,
$\mathcal{M}, s_2 \Vdash K_2 P$, koska $v(s_2, P) = v(s_3, P) = \mathit{true}$ ja
$\mathcal{M}, s_2 \Vdash K_3 P$, koska $v(s_2, P) = \mathit{true}$. Siten
$\mathcal{M}, s_2 \Vdash EP$, mistä seuraa, että
$\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_1 EP$. Siis
$\mathcal{M}, s_1 \Vdash EEP$.

Toisaalta tulos saadaan myös, jos huomataan, että $P$ on tosi kaikissa maailmoissa, jotka ovat saavutettavissa $s_1$:stä kahdella askeleella.

c) $\mathcal{M}, s_1 \nVdash CP$, koska $s_4$ on C-saavutettavissa $s_1$:stä ja $v(s_4, P) = \mathit{false}$.