Tik-79.146 **Kevät 2001**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 5
Ratkaisut

1. a) Oletetaan, että kehykselle $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$ pätee

$$\mathcal{F} \models \Box P \rightarrow \Diamond P.$$

Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$. Jos

$$\mathcal{M}, s \nVdash \Box P,$$

niin

$$\exists t : \langle s, t\rangle \in R \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, t \nVdash P.$$

Toisaalta, jos

$$\mathcal{M}, s \Vdash \Box P,$$

niin

$$\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond P,$$

joten

$$\exists t : \langle s, t\rangle \in R \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, t \Vdash P.$$

Siis $\mathcal{F}$ on sarjallinen.

b) Oletetaan, että kehys $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$ on euklidinen. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ malli ja $s \in S$ jokin sen maailma siten, että $\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box P$. Silloin

$$\mathcal{M}, s \nVdash \Box P,$$

ja

$$\exists t : \langle s, t\rangle \in R \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, t \nVdash P.$$

Oletetaan, että $\langle s, u\rangle \in R$. Koska $\langle s, t\rangle \in R$, kehyksen euklidisuudesta seuraa, että $\langle u, t\rangle \in R$. Siis

$$\mathcal{M}, u \nVdash \Box P,$$

ja

$$\mathcal{M}, u \Vdash \neg\Box P.$$

Koska u on mielivaltainen, $\mathcal{M}, s \Vdash \Box\neg\Box P$, ja on todistettu

$$\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box P \rightarrow \Box\neg\Box P.$$

Täten

$$\mathcal{M} \models \neg\Box P \rightarrow \Box\neg\Box P,$$

ja koska $\mathcal{M}$ on mielivaltainen,

$$\mathcal{F} \models \neg\Box P \rightarrow \Box\neg\Box P.$$

c) Olkoon $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$ transitiivinen kehys. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$. Jos

$$\mathcal{M}, s \Vdash \Box P,$$

niin

$$\mathcal{M}, t \Vdash P$$

kaikilla $t \in S$, joille $\langle s, t\rangle \in R$. Olkoon $u \in S$ siten, että $\langle s, u\rangle \in R$. Jos

$$\langle u, v\rangle \in R,$$

niin

$$\langle s, v\rangle \in R$$

transitiivisuuden perusteella. On siis oltava $\mathcal{M}, v \Vdash P$, jolloin pätee myös $\mathcal{M}, u \Vdash \Box P$, ja siis

$$\mathcal{M}, s \Vdash \Box\Box P.$$

Täten

$$\mathcal{F} \models \Box P \rightarrow \Box\Box P.$$

2. Oletetaan, että $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$ on refleksiivinen ja euklidinen. Jos sRt, niin myös sRs, mikä seuraa kehyksen refleksiivisyydestä. Euklidisuudesta seuraa nyt tRs eli symmetrisyys. Oletetaan sitten, että sRt ja tRu. Symmetrisyyden perusteella tRs, ja euklidisuudesta puolestaan seuraa, että sRu. Näin transitiivisuus on todistettu.

3. **KD45** = sarjalliset, transitiiviset ja euklidiset kehykset. Todistetaan **KD45** $\not\models \neg(\neg P \wedge \Box\Box P)$ muodostamalla malli

$$\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$$

siten, että jollekin sen maailmalle $s \in S$

$$\mathcal{M}, s \nVdash \neg(\neg P \wedge \Box\Box P).$$

Silloin

$$\mathcal{M}, s \Vdash \neg P \wedge \Box\Box P$$

eli

$$\mathcal{M}, s \Vdash \neg P \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s \Vdash \Box\Box P.$$

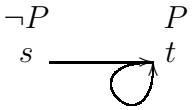
Sarjallisuuden perusteella $\exists t \in S : sRt$. Nyt on oltava myös

$$\mathcal{M}, t \Vdash \Box P.$$

Euklidisuudesta seuraa, että tRt, jolloin välttämättä täytyy päteä

$$\mathcal{M}, t \Vdash P.$$

Näin mallille $\mathcal{M}$:



on voimassa

$$\mathcal{M}, s \nVdash \neg(\neg P \wedge \Box\Box P).$$

Huomataan, että $\mathcal{M}$ on sarjallinen, transitiivinen ja euklidinen, joten $\mathcal{M}$ on vastaesimerkki.