Tik-79.146 **Kevät 2001**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 4
Ratkaisut

1. $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s\rangle,\ \langle s, t\rangle\}$, $v(s, P) = \text{false}$, ja $v(t, P) = \text{true}$.

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] \neg P & P \\ s \arrow[r] \arrow[loop below] & t \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M} \models \Box P \to P$ pätee, ja $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond P$ pätee myös, koska $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash P$. Kuitenkin $\mathcal{M}, s \nVdash P$, joten $\mathcal{M}$ on vastaesimerkki.

2. $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle,\ \langle t, t\rangle\}$, $v(s, P) = v(s, Q) = v(t, Q) = \text{false}$, ja $v(t, P) = \text{true}$.

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] \neg P & P \\ \neg Q\ s \arrow[r] & t\ \neg Q \arrow[loop below] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M} \models \Diamond P$ pätee, ja $\mathcal{M}, s \Vdash P \leftrightarrow Q$ pätee myös. Edelleen $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$ pätee. Koska kuitenkin t on ainoa s:stä saavutettavissa oleva maailma ja $\mathcal{M}, t \nVdash Q$, ei $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond Q$ ole voimassa, joten $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P \to \Diamond Q$. Siis $\mathcal{M}$ on vastaesimerkki.

3. $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$:

$$\begin{tikzcd} s_1 \arrow[r] & s_2 \arrow[d] \\ s_4 \arrow[u] & s_3 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{F}' = \langle S', R'\rangle$, missä $S' = \{r_1, r_2\}$ ja $R' = \{\langle r_1, r_2\rangle,\ \langle r_2, r_1\rangle\}$:

$$\begin{tikzcd} r_1 \arrow[d, bend left] \\ r_2 \arrow[u, bend left] \end{tikzcd}$$

Muodostetaan kuvaus $f : S \to S'$:

$$f(s_1) = f(s_3) = r_1$$
$$f(s_2) = f(s_4) = r_2$$

Kuvaus f on p-morfismi, koska

1. f on surjektiivinen (esim. $r_1 = f(s_1)$ ja $r_2 = f(s_2)$)

2. $\forall s, t \in S$: jos sRt pätee, niin $f(s)R'f(t)$ pätee
(Esimerkiksi paria $\langle s_1, s_2 \rangle \in R$ vastaa pari $\langle f(s_1), f(s_2) \rangle = \langle r_1, r_2 \rangle$, joka kuuluu relaatioon R'; loput relaation R parit voidaan tarkistaa vastaavasti.)
3. $\forall s \in S \ \forall t \in S'$: jos $f(s)R't$ pätee, niin $\exists u \in S$ siten, että sRu ja $f(u) = t$ pätee
(Esimerkiksi $\langle r_2, r_1 \rangle = \langle f(s_4), r_1 \rangle \in R'$, ja havaitaan, että $s_1 \in S$, s_4Rs_1 ja $f(s_1) = r_1$; loput tapaukset vastaavasti.)

P-morfismiproposition perusteella seuraa, että

$$\text{jos } \mathcal{F} \models P, \quad \text{niin} \quad \mathcal{F}' \models P.$$