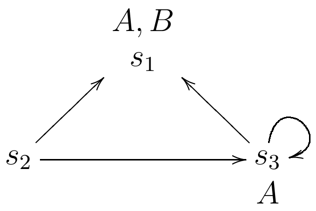
Tik-79.146 Kevät 2001
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 3
Ratkaisut

1. $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$



a) $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box A$ pätee, koska $\mathcal{M}, s_1 \Vdash A$ ja $\mathcal{M}, s_3 \Vdash A$ ovat voimassa.

b) $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Diamond\top$ pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond\top \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Diamond\top.$$

Koska ei kuitenkaan ole olemassa maailmaa $s \in S$ siten, että $\langle s_1, s \rangle \in R$, seuraa, että $\mathcal{M}, s_1 \not\Vdash \Diamond\top$, ja edelleen, että $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Diamond\top$ ei päde.

c) $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box\Box\Box\bot$ pätee, joss $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box\Box\bot$ ja $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Box\bot$ ovat voimassa. Koska ei ole olemassa maailmaa $s \in S$ siten, että $\langle s_1, s \rangle \in R$, $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box\Box\bot$ pätee. $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Box\bot$ puolestaan pätee, joss $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box\bot$ ja $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\bot$ ovat voimassa. Koska kuitenkin $\langle s_3, s_1 \rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s_1 \not\Vdash \bot$, $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\bot$ ei päde. Seuraa siis, että $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Box\bot$ ei ole voimassa, ja edelleen, että $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box\Box\Box\bot$ ei päde.

d) $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box(B \vee \Box\neg\Diamond B)$ pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_1 \Vdash B \vee \Box\neg\Diamond B \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash B \vee \Box\neg\Diamond B.$$

$\mathcal{M}, s_1 \Vdash B \vee \Box\neg\Diamond B$ pätee, koska $\mathcal{M}, s_1 \Vdash B$. $\mathcal{M}, s_3 \Vdash B \vee \Box\neg\Diamond B$ pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_3 \Vdash B \quad \text{tai} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\neg\Diamond B.$$

Koska $v(s_3, B) =$ false, ei $\mathcal{M}, s_3 \Vdash B$ toteudu. $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\neg\Diamond B$ toteutuu, joss

$$\mathcal{M}, s_1 \Vdash \neg\Diamond B \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \neg\Diamond B,$$

joss

$$\mathcal{M}, s_1 \nVdash \Diamond B \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_3 \nVdash \Diamond B.$$

Koska kuitenkin $\langle s_3, s_1 \rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s_1 \Vdash B$, seuraa, että $\mathcal{M}, s_3 \nVdash \Diamond B$ ei päde. Seuraa siis, että $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \neg\Diamond B$, $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\neg\Diamond B$ ja $\mathcal{M}, s_3 \Vdash B \vee \Box\neg\Diamond B$ eivät päde, joten $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box(B \vee \Box\neg\Diamond B)$ ei myöskään ole voimassa.

2. a) $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, $S = \{s\}$, $R = \varnothing$, ja $v(s, A) = \text{false}$.

$$\mathcal{M}, s \Vdash \Box A, \quad \text{mutta} \quad \mathcal{M}, s \nVdash A.$$

Siis $\mathcal{M}, s \nVdash \Box A \to A$.

b) $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t \rangle,\ \langle t, s \rangle\}$, $v(s, A) = \text{false}$, ja $v(t, A) = \text{true}$.

$$\begin{tikzcd} \neg A\ s \arrow[r, bend left] & t\ A \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}, s \Vdash \Box A$, mutta $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\Box A$, koska $\mathcal{M}, t \nVdash \Box A$. Täten $\mathcal{M}, s \nVdash \Box A \to \Box\Box A$.

c) $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s \rangle, \langle s, t \rangle\}$, $v(s, A) = \text{true}$, $v(t, A) = \text{false}$.

$$\begin{tikzcd} s \arrow[loop left] \arrow[r] & t \\ A & \neg A \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A$, koska $\langle s, s \rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s \Vdash A$. $\mathcal{M}, s \Vdash \Box A$ ei kuitenkaan päde, koska $\langle s, t \rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \nVdash A$. Siis $\mathcal{M}, s \nVdash \Diamond A \to \Box A$.

3. a) Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$.

($\Rightarrow$) Olkoon $s \in S$. Koska $\Diamond\top$ on pätevä mallissa, se on tosi mallin jokaisessa maailmassa, joten $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond\top$. Tällöin on olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t \rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash \top$. Tästä seuraa, että

$$\text{jos} \quad \mathcal{M}, s \Vdash \Box A, \quad \text{niin myös} \quad \mathcal{M}, t \Vdash A,$$

ja siksi

$$\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A.$$

(Jos $\mathcal{M}, s \nVdash \Box A$, implikaatio on myös silloin tosi.)

Siten $\mathcal{M}, s \Vdash \Box A \to \Diamond A$ kaikilla $s \in S$, mistä seuraa, että

$$\mathcal{M} \Vdash \Box A \to \Diamond A.$$

($\Leftarrow$) Oletetaan, että $\mathcal{M} \Vdash \Box A \to \Diamond A$, ja olkoon $s \in S$. Jos on olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t \rangle \in R$, niin

$$\mathcal{M}, t \Vdash \top, \quad \text{ja tällöin} \quad \mathcal{M}, s \Vdash \Diamond \top.$$

Ellei näin ole, niin $\mathcal{M}, s \Vdash \Box A$, ja silloin on myös oltava oletuksen perusteella $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A$. Tästä kuitenkin seuraa, että on olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t \rangle \in R$ (ja $\mathcal{M}, t \Vdash A$), mikä johtaa ristiriitaan.

b) $F = \langle S, R \rangle$, $S = \{s\}$ ja $R = \varnothing$. Tässä kehyksessä ei ole olemassa maailmaa $t \in S$ siten, että $\langle s, t \rangle \in R$. Siis kaikilla $t \in S$, joille $\langle s, t \rangle \in R$, pätee $F, t \Vdash \bot$, joten $F, s \Vdash \Box \bot$, ja edelleen $F \Vdash \Box \bot$, koska s on F:n ainoa maailma.