Tik-79.146 **Kevät 2001**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 2
Ratkaisut

Demonstraatiotehtävien ratkaisut:

1. a)

$$T\,(\exists x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2) \land \forall x_1 \forall x_2 (P(x_1, x_2) \to P(x_2, x_1)))^{1.}$$

$$T\,(\exists x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2))^{2.\,x_1/c}$$

$$T\,(\forall x_1 \forall x_2 (P(x_1, x_2) \to P(x_2, x_1)))^{4.\,x_1/c}$$

$$T\,(\exists x_2 P(c, x_2))^{3.\,x_2/d}$$

$$T\,(P(c, d))$$

$$T\,(\forall x_2 (P(c, x_2) \to P(x_2, c)))^{5.\,x_2/d}$$

$$T\,(P(c, d) \to P(d, c))$$

$$F\,(P(c, d)) \qquad T\,(P(d, c))$$

$$\otimes$$

Tästä saadaan rakenne (struktuuri) $\mathcal{A}$. Merkitään

$$A = \{1, 2\},$$

ja määritellään

$$c^{\mathcal{A}} = 1, \qquad d^{\mathcal{A}} = 2 \quad \text{sekä} \quad P^{\mathcal{A}} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}.$$

Tarkistetaan, että lause on tosi rakenteessa. Koska esim. $\langle 1, 2\rangle = \langle c^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}\rangle \in P^{\mathcal{A}}$, niin

$$\mathcal{A} \models \exists x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2).$$

Myös

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \forall x_2 (P(x_1, x_2) \to P(x_2, x_1)),$$

on voimassa, koska

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A} \models P(c,c) \rightarrow P(c,c),\\
&\mathcal{A} \models P(c,d) \rightarrow P(d,c),\\
&\mathcal{A} \models P(d,c) \rightarrow P(c,d) \text{ ja}\\
&\mathcal{A} \models P(d,d) \rightarrow P(d,d),
\end{aligned}$$

sillä $c^{\mathcal{A}} = 1, d^{\mathcal{A}} = 2, \langle c^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}} \rangle = \langle 1,1 \rangle \notin P^{\mathcal{A}}, \langle c^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}} \rangle = \langle 1,2 \rangle \in P^{\mathcal{A}}, \langle d^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}} \rangle = \langle 2,1 \rangle \in P^{\mathcal{A}}$ ja $\langle d^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}} \rangle = \langle 2,2 \rangle \notin P^{\mathcal{A}}$.

b) Käytetään rakennetta $\mathcal{A}$, jonka universumi on $A = \{1\}$. Lisäksi tarvitaan vakiosymboli c ja predikaatti P siten, että

$$c^{\mathcal{A}} = 1, \quad \text{ja} \quad P^{\mathcal{A}} = \{\langle 1,1 \rangle\}.$$

Tarkistetaan, että

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \exists x_2 P(x_1,x_2) \wedge \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P(x_1,x_2) \wedge P(x_2,x_3) \rightarrow P(x_1,x_3))$$

pätee. Koska universumissa on ainoastaan yksi alkio ($c^{\mathcal{A}} = 1$) ja $\langle 1,1 \rangle \in P$ (eli $\mathcal{A} \models P(c,c)$),

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \exists x_2 P(x_1,x_2).$$

Samasta syystä

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P(x_1,x_2) \wedge P(x_2,x_3) \rightarrow P(x_1,x_3)),$$

koska

$$\mathcal{A} \models P(c,c) \wedge P(c,c) \rightarrow P(c,c).$$

2. a)

$$\begin{array}{c}
F\,((\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \to \forall x(P(x) \vee Q(x)))^{1.} \\
| \\
T\,(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))^{2.} \\
F\,(\forall x(P(x) \vee Q(x)))^{3.\,x/c} \\
| \\
T\,(\forall x P(x))^{5.\,x/c} \\
T\,(\forall x Q(x)) \\
| \\
F\,(P(c) \vee Q(c))^{4.} \\
| \\
F\,(P(c)) \\
F\,(Q(c)) \\
| \\
T\,(P(c)) \\
\otimes
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{c}
F\,(\exists y(\exists x P(x) \to P(y)))^{1.\,y/c,\,4.\,y/d} \\
| \\
F\,(\exists x P(x) \to P(c))^{2.} \\
| \\
T\,(\exists x P(x))^{3.\,x/d} \\
F\,(P(c)) \\
| \\
T\,(P(d)) \\
| \\
F\,(\exists x P(x) \to P(d))^{5.} \\
| \\
T\,(\exists x P(x)) \\
F\,(P(d)) \\
\otimes
\end{array}$$

Kotitehtävien ratkaisut:

1. a) Jos φ on tosi, niin agentti tietää φ:n.
   b) Jos agentti ei tiedä φ:tä, niin agentti tietää, että se ei tiedä φ:tä.
   c) Jos agentti tietää, että φ:stä seuraa ψ, niin silloin, jos agentti tietää φ:n, niin agentti tietää ψ:n.

2. a) $\varphi \to LK\varphi$

b) $L\varphi \wedge L\psi \to L(\varphi \wedge \psi)$

c) $K\varphi \to L\varphi$

d) $LL\varphi \to L\varphi$

3. Olkoon $s =$ "ulkona sataa".

   a) $K_a K_b s \wedge \neg K_b K_a K_b s$

   b) $K_a(\neg K_b s \wedge \neg K_b \neg s)$

   c) $K_b(K_a s \vee K_a \neg s)$

   d) $\neg K_a K_b K_a s \wedge \neg K_a \neg K_b K_a s$