Tik-79.146 **Kevät 2001**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 13
Ratkaisut

1. Lasketaan solmun

$$D_0 = \{(\mathbf{AG}(\neg P \vee \mathbf{AF}Q) \wedge \mathbf{EF}P) \wedge \mathbf{AF}\neg Q\}$$

AND-seuraajat. Merkitään

$$\begin{aligned} A = \{&(\mathbf{AG}(\neg P \vee \mathbf{AF}Q) \wedge \mathbf{EF}P) \wedge \mathbf{AF}\neg Q, \\ &\mathbf{AG}(\neg P \vee \mathbf{AF}Q) \wedge \mathbf{EF}P, \\ &\mathbf{AG}(\neg P \vee \mathbf{AF}Q), \mathbf{EF}P, \\ &\mathbf{AF}\neg Q, \neg P \vee \mathbf{AF}Q, \\ &\mathbf{AXAG}(\neg P \vee \mathbf{AF}Q)\}, \end{aligned}$$

jolloin AND-seuraajat ovat

$$\begin{aligned} C_0 &= A \cup \{\neg P, P, \neg Q\} \\ C_1 &= A \cup \{Q, \mathbf{AF}Q, P, \neg Q\} \\ C_2 &= A \cup \{\mathbf{AXAF}Q, \mathbf{AF}Q, P, \neg Q\} \\ C_3 &= A \cup \{\neg P, \mathbf{EXEF}P, \neg Q\} \\ C_4 &= A \cup \{Q, \mathbf{AF}Q, \mathbf{EXEF}P, \neg Q\} \\ C_5 &= A \cup \{\mathbf{AXAF}Q, \mathbf{AF}Q, \mathbf{EXEF}P, \neg Q\} \\ C_6 &= A \cup \{\neg P, P, \mathbf{AXAF}\neg Q\} \\ C_7 &= A \cup \{Q, \mathbf{AF}Q, P, \mathbf{AXAF}\neg Q\} \\ C_8 &= A \cup \{\mathbf{AXAF}Q, \mathbf{AF}Q, P, \mathbf{AXAF}\neg Q\} \\ C_9 &= A \cup \{\neg P, \mathbf{EXEF}P, \mathbf{AXAF}\neg Q\} \\ C_{10} &= A \cup \{Q, \mathbf{AF}Q, \mathbf{EXEF}P, \mathbf{AXAF}\neg Q\} \\ C_{11} &= A \cup \{\mathbf{AXAF}Q, \mathbf{AF}Q, \mathbf{EXEF}P, \mathbf{AXAF}\neg Q\} \end{aligned}$$

AND-seuraajat C_0, C_1, C_4 ja C_6 karsitaan, koska ne sisältävät jonkin lauseen ja sen negaation. Lasketaan jäljelle jääneiden AND-seuraajien OR-seuraajat:

C_2:n OR-seuraaja: $D_1 = \{\mathbf{AG}(\neg P \vee \mathbf{AF}Q), \mathbf{AF}Q\}$
C_3:n OR-seuraaja: $D_2 = \{\mathbf{AG}(\neg P \vee \mathbf{AF}Q), \mathbf{EF}P\}$
C_5:n OR-seuraaja: $D_3 = \{\mathbf{AG}(\neg P \vee \mathbf{AF}Q), \mathbf{AF}Q, \mathbf{EF}P\}$

C_7:n OR-seuraaja: $D_4 = \{\mathbf{AG}(\neg P \vee \mathbf{AF}Q), \mathbf{AF}\neg Q\}$
C_8:n OR-seuraaja: $D_5 = \{\mathbf{AG}(\neg P \vee \mathbf{AF}Q), \mathbf{AF}Q, \mathbf{AF}\neg Q\}$
C_9:n OR-seuraaja: $D_6 = \{\mathbf{AG}(\neg P \vee \mathbf{AF}Q), \mathbf{EF}P, \mathbf{AF}\neg Q\}$
C_{10}:n OR-seuraaja: $D_7 = \{\mathbf{AG}(\neg P \vee \mathbf{AF}Q), \mathbf{EF}P, \mathbf{AF}\neg Q\} = D_6$
C_{11}:n OR-seuraaja: $D_8 = \{\mathbf{AG}(\neg P \vee \mathbf{AF}Q), \mathbf{AF}Q, \mathbf{EF}P, \mathbf{AF}\neg Q\}$

2. Aloitetaan lauseen negaatiosta

$$\neg\Big(\big(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \to \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)\Big).$$

Muunnetaan lause positiiviseen normaalimuotoon.

$$\big(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \wedge \neg\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$$
$$\big(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)$$

Muodostetaan taulu.

$$D_0 = \Big\{\big(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)\Big\}$$

D_0:n AND-seuraajat:

$$\begin{aligned}
C_0 = \Big\{&\big(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \neg P\Big\}\\
C_1 = \Big\{&\big(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)\Big\}\\
C_2 = \Big\{&\big(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), P, \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \neg Q,\\
&\neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \neg P\Big\}\\
C_3 = \Big\{&\big(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), P, \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \neg Q,\\
&\neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)\Big\}
\end{aligned}$$

Solmut C_0, C_1 ja C_2 voidaan karsia pois, koska ne sisältävät jonkin atomilauseen ja sen negaation.

C_3:n OR-seuraaja: $D_1 = \{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)\}$

D_1:n AND-seuraajat:

$$\begin{aligned}
C_4 &= D_1 \cup \{Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \neg P\} \\
C_5 &= D_1 \cup \{Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)\} \\
C_6 &= D_1 \cup \{P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), P, \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \neg Q, \\
&\qquad\qquad \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \neg P\} \\
C_7 &= D_1 \cup \{P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), P, \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \neg Q, \\
&\qquad\qquad \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)\}
\end{aligned}$$

Solmut C_4, C_5 ja C_6 karsitaan pois.

C_7:n OR-seuraaja: $\{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)\} = D_1$

C_7 voidaan karsia pois, koska tulevaisuuslause $\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$ ei toteudu (Q ei koskaan tosi). Tämän jälkeen karsitaan D_1, C_3 ja D_0, joten jäljelle jää tyhjä taulu. Siten alkuperäinen lause on pätevä.

3. Muunnetaan lause ensin positiiviseen normaalimuotoon.

$$\begin{gathered}
\mathbf{GF}P \rightarrow \mathbf{GF}\neg P \\
\neg\mathbf{GF}P \vee \mathbf{GF}\neg P \\
\mathbf{FG}\neg P \vee \mathbf{GF}\neg P
\end{gathered}$$

Korvataan sitten lauseessa esiintyvät LTL-operaattorit **F**- ja **G** CTL:n **AF**- ja **AG**-operaattoreilla, jolloin saadaan CTL-lause

$$\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P.$$

Tämä CTL-lause on toteutuva, jos ja vain, jos alkuperäinen LTL-lause on toteutuva. Muodostetaan taulu CTL-lauseelle.

$$D_0 = \{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P\}$$

D_0:n AND-seuraajat:

$$\begin{aligned}
C_0 &= \big\{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AG}\neg P, \neg P, \mathbf{AXAG}\neg P\big\} \\
C_1 &= \big\{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AXAFAG}\neg P\big\} \\
C_2 &= \big\{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \\
&\qquad \mathbf{AXAGAF}\neg P, \neg P\big\} \\
C_3 &= \big\{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \\
&\qquad \mathbf{AXAGAF}\neg P, \mathbf{AXAF}\neg P\big\}
\end{aligned}$$

C_0:n OR-seuraaja: $D_1 = \{\mathbf{AG}\neg P\}$
C_1:n OR-seuraaja: $D_2 = \{\mathbf{AFAG}\neg P\}$
C_2:n OR-seuraaja: $D_3 = \{\mathbf{AGAF}\neg P\}$
C_3:n OR-seuraaja: $D_4 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P\}$

D_1:n AND-seuraaja: $C_4 = \{\mathbf{AG}\neg P, \neg P, \mathbf{AXAG}\neg P\}$

D_2:n AND-seuraajat:

$$C_5 = \{\mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AG}\neg P, \neg P, \mathbf{AXAG}\neg P\}$$
$$C_6 = \{\mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AXAFAG}\neg P\}$$

D_3:n AND-seuraajat:

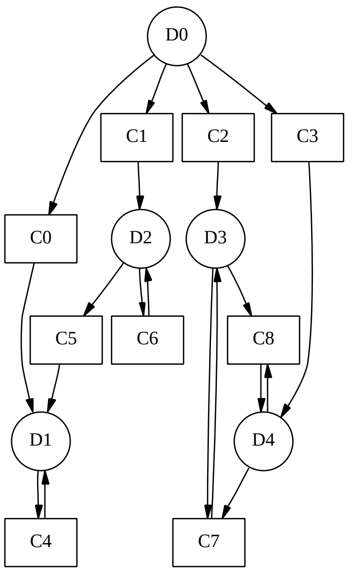
$$C_7 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \neg P\}$$
$$C_8 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \mathbf{AXAF}\neg P\}$$

D_4:n AND-seuraajat:

$$C_9 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \neg P\} = C_7$$
$$C_{10} = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \mathbf{AXAF}\neg P\} = C_8$$

C_4:n OR-seuraaja: $D_5 = \{\mathbf{AG}\neg P\} = D_1$
C_5:n OR-seuraaja: $D_6 = \{\mathbf{AG}\neg P\} = D_1$
C_6:n OR-seuraaja: $D_7 = \{\mathbf{AFAG}\neg P\} = D_2$
C_7:n OR-seuraaja: $D_8 = \{\mathbf{AGAF}\neg P\} = D_3$
C_8:n OR-seuraaja: $D_9 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P\} = D_4$

Alustava taulu T_0:



Koska solmu C_4 ei sisällä keskenään ristiriitaisia lauseita eikä myöskään yhtään tulevaisuuslausetta, solmu C_4 jää lopulliseen tauluun. Tällöin OR-solmulle D_1 jää tauluun vähintään yksi seuraaja, joten solmua D_1 ei myöskään karsita. Kaikki solmun C_0 seuraajat jäävät siis myös lopulliseen tauluun. Solmua C_0 ei karsita, koska se ei sisällä keskenään ristiriitaisia lauseita ja koska sen kaikki tulevaisuuslauseet (tässä tapauksessa vain yksi, $\mathbf{AFAG}\neg P$) toteutuvat alustavassa taulussa. Koska solmu C_0 sisältää lauseen $\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P$, seuraa, että lause toteutuu solmussa C_0.
Solmujen C_0 ja C_4 avulla voidaan nyt muodostaa CTL-lauseelle malli

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r] & C_4 \arrow[loop right] \\ \neg P & \neg P \end{tikzcd}$$

Tämä on samalla malli myös alkuperäiselle LTL-lauseelle.