Tik-79.146 **Kevät 2001**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 10
Ratkaisut

1.

Perusoperaattori

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$ joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s = s_0, s_1, \ldots)$
on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, s_i \models Q$ ja kaikille $j < i$: $\mathcal{M}, s_j \models P$

$P \to \top$, $Q \to P$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{A}(\top\mathbf{U}P)$ joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s = s_0, s_1, \ldots)$
on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, s_i \models P$ ja kaikille $j < i$: $\mathcal{M}, s_j \models \top$
$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}P$ joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s = s_0, s_1, \ldots)$
on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, s_i \models P$

Perusoperaattori

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)$ joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \ldots)$
ja on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, s_i \models Q$ ja kaikille $j < i$: $\mathcal{M}, s_j \models P$

$P \to \top$, $Q \to P$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{E}(\top\mathbf{U}P)$ joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \ldots)$
ja on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, s_i \models P$ ja kaikille $j < i$: $\mathcal{M}, s_j \models \top$
$\mathcal{M}, s \models \mathbf{EF}P$ joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \ldots)$
ja on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, s_i \models P$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}P$ joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s = s_0, s_1, \dots)$
on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, s_i \models P$
$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}\neg P$ joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s = s_0, s_1, \dots)$
on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, s_i \models \neg P$
$\mathcal{M}, s \not\models \mathbf{AF}\neg P$ joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \dots)$
ja kaikille i: $\mathcal{M}, s_i \not\models \neg P$
$\mathcal{M}, s \models \neg\mathbf{AF}\neg P$ joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \dots)$
ja kaikille i: $\mathcal{M}, s_i \models P$
$\mathcal{M}, s \models \mathbf{EG}P$ joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \dots)$
ja kaikille i: $\mathcal{M}, s_i \models P$

2.

$\mathcal{M}, x \models P\mathbf{U}Q$ joss on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, x^i \models Q$
ja kaikille $j < i$: $\mathcal{M}, x^j \models P$
$\mathcal{M}, x \models \top\mathbf{U}P$ joss on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, x^i \models P$
ja kaikille $j < i$: $\mathcal{M}, x^j \models \top$
$\mathcal{M}, x \models \mathbf{F}P$ joss on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, x^i \models P$

$\mathcal{M}, x \models \mathbf{F}P$ joss on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, x^i \models P$
$\mathcal{M}, x \models \mathbf{F}\neg P$ joss on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, x^i \models \neg P$
$\mathcal{M}, x \not\models \mathbf{F}\neg P$ joss ei ole olemassa i, jolle $\mathcal{M}, x^i \models \neg P$
$\mathcal{M}, x \models \neg\mathbf{F}\neg P$ joss kaikille i: $\mathcal{M}, x^i \not\models \neg P$
$\mathcal{M}, x \models \mathbf{G}P$ joss kaikille i: $\mathcal{M}, x^i \models P$

3.

$\mathcal{M}, x \models P\mathbf{U}Q$ joss on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, x^i \models Q$
ja kaikille $j < i$: $\mathcal{M}, x^j \models P$
$\mathcal{M}, x \models (\neg P)\mathbf{U}(\neg Q)$ joss on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, x^i \models \neg Q$
ja kaikille $j < i$: $\mathcal{M}, x^j \models \neg P$
$\mathcal{M}, x \not\models (\neg P)\mathbf{U}(\neg Q)$ joss ei ole olemassa i, jolle $\mathcal{M}, x^i \models \neg Q$ tai
jokaisella i, jolle $\mathcal{M}, x^i \models \neg Q$ on olemassa $j < i$, jolle $\mathcal{M}, x^j \not\models \neg P$
$\mathcal{M}, x \models P\mathbf{R}Q$ joss kaikille i pätee $\mathcal{M}, x^i \models Q$ tai
jokaisella i, jolle $\mathcal{M}, x^i \models \neg Q$ on olemassa $j < i$, jolle $\mathcal{M}, x^j \models P$

Tehtävän malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$:

$$\begin{aligned} S &= \{s_0, s_1, s_2\} \\ R &= \{\langle s_0, s_1 \rangle, \langle s_1, s_2 \rangle, \langle s_2, s_2 \rangle\} \end{aligned}$$

Määritellään nyt esim.

$$\begin{array}{ll} v(s_0, P) = \text{true} & v(s_0, Q) = \text{false} \\ v(s_1, P) = \text{false} & v(s_1, Q) = \text{true} \\ v(s_2, P) = \text{false} & v(s_2, Q) = \text{false} \end{array}$$

Nyt täydelle polulle $x = (s_0, s_1, s_2, s_2, s_2, \dots)$ pätee

$$\mathcal{M}, x \models P\mathbf{U}Q, \text{ koska } \mathcal{M}, x^1 \models Q \text{ ja kaikille } j < 1 : \mathcal{M}, x^j \models P,$$

mutta

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, x \not\models Q\mathbf{R}P, &\text{ koska } \mathcal{M}, x^i \models P \text{ ei toteudu kaikilla } i \\ &\text{ja koska } \mathcal{M}, x^1 \models \neg P, \text{ mutta ei ole olemassa } j < 1 \\ &\text{siten, että } \mathcal{M}, x^j \models Q. \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} s_0 \arrow[r] & s_1 \arrow[r] & s_2 \arrow[loop above] \\ P, \neg Q & \neg P, Q & \neg P, \neg Q \end{tikzcd}$$