Ratkaisumenetelmät temporaalilogiikalle

- Äärellisen mallin ominaisuus (vastamallin koolle yläraja)
- Taulumenetelmä (esim. CTL)

  (i) Rakennetaan tutkittavalle lauseelle taulugraafi, joka esittää (oleellisesti) kaikki lauseen mallit.

  (ii) Tarkistetaan, että kaikki tulevaisuuslauseet toteutuvat taulussa (mallintarkastus).
- Automaattiteoreettinen menetelmä (esim. LTL)

  (i) Rakennetaan tutkittavalle lauseelle äärellistilainen automaatti, joka hyväksyy äärettömiä objekteja (esim. jonoja) siten, että automaatti hyväksyy (oleellisesti) kaikki lauseen mallit.

  (ii) Tarkistetaan, onko automaatin hyväksymä kieli tyhjä.

Taulumenetelmä CTL:lle

CTL:n taulu on bipartiitti graafi, jossa on solmut ovat lausejoukkoja ja niitä on kahdentyyppisiä: OR-solmuja ja AND-solmuja.

Lauseelle P taulu rakennetaan muuntamalla P ensin **positiiviseen normaalimuotoon** (jossa negaatio esiintyy vain atomilauseen edessä) ja etenemällä sitten kahdessa vaiheessa:

(i) rakennetaan alustava taulu T_0 ja

(ii) muodostetaan lopullinen taulu T_1 karsintasäännöillä taulusta T_0.

CTL-lause muunnetaan **positiiviseen normaalimuotoon** seuraavilla säännöillä:

$$
\begin{array}{ll}
P \to Q & \mapsto \ \neg P \vee Q \\
\neg(P \vee Q) & \mapsto \ \neg P \wedge \neg Q \\
\neg(P \wedge Q) & \mapsto \ \neg P \vee \neg Q \\
\neg\neg P & \mapsto \ P \\
\neg\mathbf{AG}P & \mapsto \ \mathbf{EF}\neg P \\
\neg\mathbf{EF}P & \mapsto \ \mathbf{AG}\neg P \\
\neg\mathbf{EG}P & \mapsto \ \mathbf{AF}\neg P \\
\neg\mathbf{AF}P & \mapsto \ \mathbf{EG}\neg P \\
\neg\mathbf{AX}P & \mapsto \ \mathbf{EX}\neg P \\
\neg\mathbf{EX}P & \mapsto \ \mathbf{AX}\neg P \\
\neg\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q) & \mapsto \ \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q) \\
\neg\mathbf{E}(P\mathbf{U}Q) & \mapsto \ \mathbf{A}(\neg P\mathbf{B}Q) \\
\neg\mathbf{A}(P\mathbf{B}Q) & \mapsto \ \mathbf{E}(\neg P\mathbf{U}Q) \\
\neg\mathbf{E}(P\mathbf{B}Q) & \mapsto \ \mathbf{A}(\neg P\mathbf{U}Q)
\end{array}
$$

- Huom! Lyhennysmerkinnät:
  $\mathbf{A}(P\mathbf{B}Q)$: $\neg\mathbf{E}((\neg P)\mathbf{U}Q)$
  $\mathbf{E}(P\mathbf{B}Q)$: $\neg\mathbf{A}((\neg P)\mathbf{U}Q)$
- Positiivisessa normaalimuodossa negaatioita esiintyy vain atomilauseiden edessä.
- Merkintä $\sim P$: lauseen $\neg P$ positiivinen normaalimuoto.

  Esimerkki.

  $\sim\mathbf{AG}(R \to (\neg Q \wedge \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q))) :$
  $\mathbf{EF}(R \wedge (Q \vee \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)))$

  koska $\neg\mathbf{AG}(R \to (\neg Q \wedge \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)))$

  $$
  \begin{array}{ll}
  & \mapsto \ \mathbf{EF}\neg(\neg R \vee (\neg Q \wedge \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q))) \\
  & \mapsto \ \mathbf{EF}(R \wedge \neg(\neg Q \wedge \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q))) \\
  & \mapsto \ \mathbf{EF}(R \wedge (Q \vee \neg\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q))) \\
  & \mapsto \ \mathbf{EF}(R \wedge (Q \vee \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)))
  \end{array}
  $$

Alustavan taulun T_0 muodostaminen:

- Aloitetaan OR-solmusta $D_0 = \{P\}$.
- OR-solmun D seuraajat ovat AND-solmuja, jotka saadaan soveltamalla α/β-**sääntöjä** solmuun D.
- AND-solmun C seuraajat ovat OR-solmuja, jotka saadaan **seuraajasäännöllä** solmusta C.

Huom! Jos OR-solmun D seuraaja C esiintyy jo taulussa, ei tauluun tule toista kopiota, vaan D:n seuraajaksi tulee jo olemassa oleva solmu C.
Samoin AND-solmuille.

$\boxed{\Rightarrow}$ Taulu äärellinen

OR-solmun D seuraajat ovat D:sta seuraavilla α- **ja** β-**säännöillä** saatavat alaspäin suljetut joukot.

Joukko C on alaspäin suljettu, kun seuraavat kaksi ehtoa toteutuvat:
(i) Jos $\alpha \in C$, $\alpha_1 \in C$ ja $\alpha_2 \in C$.
(ii) Jos $\beta \in C$, $\beta_1 \in C$ tai $\beta_2 \in C$.

α-säännöt:

$$\frac{P \wedge Q}{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}} \qquad \frac{\mathbf{AG}P}{\begin{array}{c} P \\ \mathbf{AXAG}P \end{array}} \qquad \frac{\mathbf{EG}P}{\begin{array}{c} P \\ \mathbf{EXEG}P \end{array}}$$

$$\frac{\mathbf{A}(P\mathbf{B}Q)}{\begin{array}{c} \sim Q \\ P \vee \mathbf{AXA}(P\mathbf{B}Q) \end{array}} \qquad \frac{\mathbf{E}(P\mathbf{B}Q)}{\begin{array}{c} \sim Q \\ P \vee \mathbf{EXE}(P\mathbf{B}Q) \end{array}}$$

β-säännöt:

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q} \qquad \frac{\mathbf{AF}P}{P \mid \mathbf{AXAF}P} \qquad \frac{\mathbf{EF}P}{P \mid \mathbf{EXEF}P}$$

$$\frac{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)}{Q \mid P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)} \qquad \frac{\mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)}{Q \mid P \wedge \mathbf{EXE}(P\mathbf{U}Q)}$$

Huom! Literaaleille sekä $\mathbf{AX}P$ ja $\mathbf{EX}P$ lauseille ei sääntöjä.

Esimerkki.

Olkoon $D = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R)\}$
D:sta saatavat alaspäin suljetut joukot ovat:

$C_1 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R),$
$\mathbf{EF}((P \wedge Q) \vee R),$
$(P \wedge Q) \vee R, P \wedge Q, P, Q\}$

$C_2 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R),$
$\mathbf{EF}((P \wedge Q) \vee R),$
$(P \wedge Q) \vee R, R\}$

$C_3 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R),$
$\mathbf{EF}((P \wedge Q) \vee R),$
$\mathbf{EXEF}((P \wedge Q) \vee R)\}$

$C_4 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R),$
$\mathbf{AXAFEF}((P \wedge Q) \vee R)\}$

(Alaspäin suljetut joukot voidaan rakentaa lauselogiikan taulumenetelmän tapaan.)

AND-solmun C seuraajat saadaan **seuraajasäännöllä**:

> Olkoon joukossa C seuraavatilalauseet:
> $\mathbf{AX}P_1, \ldots, \mathbf{AX}P_l,$
> $\mathbf{EX}Q_1, \ldots, \mathbf{EX}Q_k.$
> Tällöin C:llä on seuraajat:
> $D_1 = \{P_1, \ldots, P_l, Q_1\} \ldots$
> $D_k = \{P_1, \ldots, P_l, Q_k\}$

Esimerkki. Olkoon
$C = \{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q),$
$\mathbf{EG}P, P, \mathbf{EXEG}P,$
$\mathbf{EF}Q, \mathbf{EXEF}Q\}.$

Tällöin C:n seuraajat ovat
$D_1 = \{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{EG}P\}$ ja
$D_2 = \{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{EF}Q\}.$

(Huom! Kullakin AND-solmulla pitää olla ainakin yksi seuraaja.)

Alustavasta taulusta T_0 saadaan lopullinen taulu suorittamalla karsintaa seuraavilla säännöillä, kunnes mitään niistä ei voida soveltaa.

- Poistetaan AND-solmu, joka sisältää lauseen ja sen negaation.
- Poistetaan AND-solmu, jos yksikin sen alkuperäisistä seuraajista on poistettu.
- Poistetaan OR-solmu, jos kaikki sen alkuperäisistä seuraajista on poistettu.
- Poistetaan AND-solmu, jos jokin sen **tulevaisuuslause** ei toteudu tämän hetkisessä taulussa (mallintarkastus).

Tulevaisuuslauseita ovat seuraavaa muotoa olevat lauseet:

$\mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)$
$\mathbf{EF}Q$
$\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$
$\mathbf{AF}Q$

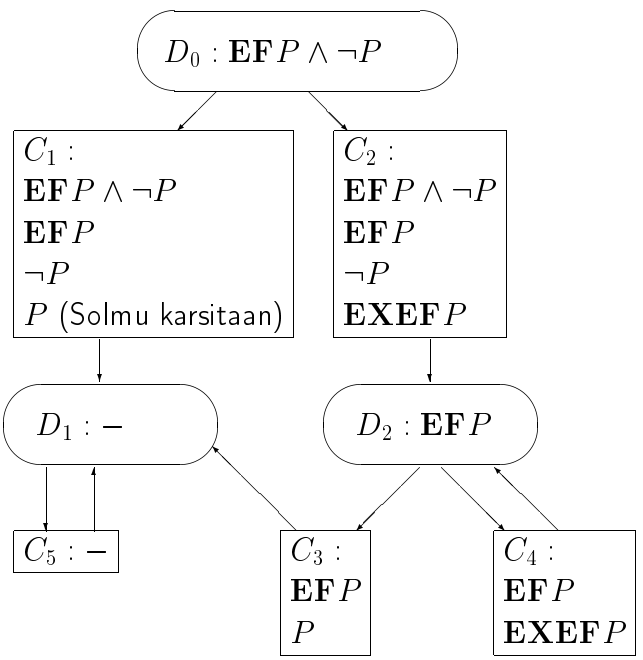
Tulevaisuuslauseiden toteutuminen taulussa määritellään seuraavasti:

- Tulevaisuuslause $\mathbf{EF}Q$ ($\mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)$) toteutuu AND-solmussa C, joss taulusta löytyy solmusta C lähtevä polku AND-solmuun C', joka sisältää lauseen Q (ja polun kaikissa muissa AND-solmuissa on lause P).
- Tulevaisuuslause $\mathbf{AF}Q$ ($\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$) toteutuu AND-solmussa C, joss taulusta löytyy asyklinen aligraafi, jolle pätee:
  (i) Aligraafin juuri on solmu C.
  (ii) Kullekin OR-sisäsolmulle täsmälleen yksi sen AND-seuraajasolmu on aligraafissa.
  (iii) Kullekin AND-sisäsolmulle kaikki sen OR-seuraajasolmut ovat mukana aligraafissa.
  (iv) Kaikissa aligraafin lehtisolmuissa on lause Q (ja kaikissa muissa AND-solmuissa P).

Esimerkki. Olkoon $D_0 = \{\mathbf{EF}P \wedge \neg P\}$.

- D_0:n AND-seuraajat:
  $C_1 = \{\mathbf{EF}P \wedge \neg P, \mathbf{EF}P, \neg P, P\}$ ja
  $C_2 = \{\mathbf{EF}P \wedge \neg P, \mathbf{EF}P, \neg P, \mathbf{EXEF}P\}$
- C_1:n OR-seuraajat: $D_1 = \{\}$
  (Huom. väh. yksi seuraaja.)
  C_2:n OR-seuraajat: $D_2 = \{\mathbf{EF}P\}$
- D_2:n AND-seuraajat:
  $C_3 = \{\mathbf{EF}P, P\}$ ja $C_4 = \{\mathbf{EF}P, \mathbf{EXEF}P\}$
- D_1:n AND-seuraajat: $C_5 = \{\}$
- C_3:n OR-seuraajat: $\{\} = D_1$
  C_4:n OR-seuraajat: $\{\mathbf{EF}P\} = D_2$
  C_5:n OR-seuraajat: $\{\} = D_1$
- Alustava taulu T_0 on valmis.
- Karsinta: Poistetaan C_1 (lause ja negaatio).
  Ainoa tulevaisuuslause $\mathbf{EF}P$ toteutuu jokaisessa AND-solmussa.
  Lopullinen taulu T_1 valmis.

Yleensä taulut tehdään graafin muotoon:



Teoreema. Olkoon CTL-lause P positiivisessa normaalimuodossa. Tällöin P on toteutuva joss lopullisessa taulussa T_1 on AND-solmu, joka sisältää lauseen P.

- CTL-taulu antaa lauseen P mallin:
  Mallin tilat AND-solmuja ja valuaatio suoraan AND-solmun sisältämistä atomilauseista.
  Seuraajat valittava siten, että tulevaisuuslauseet toteutuvat.
- Taulumenetelmä ohjelmasynteesissä:
  (i) Ohjelman määrittely CTL-lauseina.
  (ii) Tauluilla määrittelylle automaattisesti malli, joka antaa ohjelman ohjausrakenteen.
- CTL-taulut antavat menetelmän myös LTL-toteutuvuuden tarkastamiseen:

Teoreema. Olkoon LTL-lause P positiivisessa normaalimuodossa ja CTL-lause P' saatu siitä korvaamalla operaattorit $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{B}$, operaattoreilla $\mathbf{AF}, \mathbf{AG}, \mathbf{AX}, \mathbf{AU}, \mathbf{AB}$. Tällöin P on LTL-toteutuva joss P' on CTL-toteutuva.

Esimerkki. Anna CTL-lauseelle $\mathbf{EF}P \wedge \neg P$ malli.

Muodostetaan malli $\langle S, R, v\rangle$ edellä annetusta taulusta T_1 esimerkiksi seuraavasti:

$S = \{C_2, C_3, C_5\}$

$R = \{\langle C_2, C_3\rangle, \langle C_3, C_5\rangle, \langle C_5, C_5\rangle\}$

$v(P, s) = \text{true}$ jos $s = C_3$ muutoin $v(P, s) = \text{false}$

Toinen vaihtoehto:

$S = \{C_2, C_3, C_4, C_5\}$

$R = \{\langle C_2, C_4\rangle, \langle C_4, C_3\rangle, \langle C_3, C_5\rangle, \langle C_5, C_5\rangle\}$

$v(P, s) = \text{true}$ jos $s = C_3$ muutoin $v(P, s) = \text{false}$

Esimerkki. Onko CTL-lause φ:

$\mathbf{EX}(P \vee Q) \rightarrow (\mathbf{EX}P \vee \mathbf{EX}Q)$

pätevä?

- Lause on pätevä joss sen negaatio ei ole toteutuva.
- Toteutuvuus voidaan selvittää taulumenetelmällä:

  (i) Muodostetaan lauseen φ **negaation** positiivinen normaalimuoto $\sim\varphi$.

  (ii) Rakennetaan taulu lauseelle $\sim\varphi$.
- φ on pätevä joss $\sim\varphi$ ei ole toteutuva joss lopullisessa taulussa ei ole yhtään AND-solmua, joka sisältää lauseen $\sim\varphi$.

Esimerkki–jatkuu.

Lauseen $\neg\varphi$ positiivinen normaalimuoto $\sim\varphi$:
$\neg(\mathbf{EX}(P \vee Q) \rightarrow (\mathbf{EX}P \vee \mathbf{EX}Q)$
$\mapsto\ \mathbf{EX}(P \vee Q) \wedge \neg(\mathbf{EX}P \vee \mathbf{EX}Q)$
$\mapsto\ \mathbf{EX}(P \vee Q) \wedge (\neg\mathbf{EX}P \wedge \neg\mathbf{EX}Q)$
$\mapsto\ \mathbf{EX}(P \vee Q) \wedge (\mathbf{AX}\neg P \wedge \mathbf{AX}\neg Q)$

$\sim\varphi$: $\mathbf{EX}(P \vee Q) \wedge (\mathbf{AX}\neg P \wedge \mathbf{AX}\neg Q)$

Taulu: $D_0 = \{\sim\varphi\}$.

- D_0:n AND-seuraajat:
  $C_1 = \{\sim\varphi, \mathbf{EX}(P \vee Q), \mathbf{AX}\neg P, \mathbf{AX}\neg Q\}$
- C_1:n OR-seuraajat: $D_1 = \{P \vee Q, \neg P, \neg Q\}$
- D_1:n AND-seuraajat:
  $C_2 = D_1 \cup \{P\}$ ja $C_3 = D_1 \cup \{Q\}$
- C_2:n OR-seuraajat: $D_3 = \{\}$
  C_3:n OR-seuraajat: $\{\} = D_3$
  D_3:n AND-seuraajat: $C_4 = \{\}$
  C_4:n OR-seuraajat: $\{\} = D_3$
- Alustava taulu T_0 on valmis.

- Karsinta:
  (i) C_2, C_3 voidaan poistaa (sisältävät lauseen ja sen negaation)
  (ii) D_1 voidaan poistaa (ei seuraajia)
  (iii) C_1 voidaan poistaa (seuraaja poistettu)
  (iv) D_0 voidaan poistaa (ei seuraajia)

  Lopullinen taulu T_1 valmis.

  Taulussa T_1 ei ole AND-solmua, jossa esiintyy $\sim\varphi$.

  $\boxed{\Rightarrow}$ $\sim\varphi$ ei ole toteutuva. Siis φ on pätevä.

Laskennallinen vaativuus

- CTL

  Mallintarkastus: $\mathbf{P}$-täydellinen
  $O(|M| \cdot |P|)$

  Toteutuvuus: $\mathbf{EXPTIME}$-täydellinen

- LTL

  Mallintarkastus: $\mathbf{PSPACE}$-täydellinen
  $O(|M| \cdot exp(|P|))$

  Toteutuvuus: $\mathbf{PSPACE}$-täydellinen

- CTL*

  Mallintarkastus: $\mathbf{PSPACE}$-täydellinen
  $O(|M| \cdot exp(|P|))$

  Toteutuvuus: 2$\mathbf{EXPTIME}$-täydellinen

Tehokkaasti toteutettavia aliluokkia

- Toteutuvuusongelma ratkeaa polynomisessa ajassa esim. ohjelmasynteesin kannalta mielenkiintoisissa tapauksissa.

- Esim. SCTL (yksinkertaistettu CTL)

  $P_1 \vee \cdots \vee P_n$
  $\mathbf{AG}(P_1 \vee \cdots \vee P_n)$
  $\mathbf{AG}(P_0 \rightarrow \mathbf{AF}(P_1 \vee \cdots \vee P_n))$
  $\mathbf{AG}(P_0 \rightarrow \mathbf{A}(P_1 \vee \cdots \vee P_n \mathbf{U} Q_1 \vee \cdots \vee Q_m))$
  $\mathbf{AG}(P_0 \rightarrow \mathbf{AX}(P_1 \vee \cdots \vee P_n) \wedge$
  $\mathbf{EX}(Q_1 \vee \cdots \vee Q_m) \wedge \cdots \wedge \mathbf{EX}(R_1 \vee \cdots \vee R_l))$

  jossa ESC-oletus pätee: tulevaisuuslauseet eivät riipu historiasta.

- Esim. RLTL (rajoitettu LTL):

  $\mathbf{G}(P_1 \vee \cdots \vee P_n)$
  $\mathbf{G}(P_0 \rightarrow \mathbf{F}(P_1 \vee \cdots \vee P_n))$
  $\mathbf{G}(P_0 \rightarrow \mathbf{X}(P_1 \vee \cdots \vee P_n))$