TAULUMENETELMÄ MODAALILOGIIKALLE

- On vaikeaa löytää Hilbert-tyylisiä todistuksia:

  Käytössä Modus Ponens -sääntö: jotta voidaan johtaa Q, täytyy johtaa P ja $P \to Q$.

  Mutta mikä on sopiva P?

  Esim. $\{A \to B, A \to C\} \models A \to (B \wedge C)$

  1. $A \to B$
  2. $A \to C$

  $\vdots$

  n. $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$

- Alikaavaperiaate: lauseen Q todistuksessa tarvitaan vain Q:n alikaavoja.

  $\boxed{\Rightarrow}$ resoluutio, sekventtikalkyyli, taulumenetelmä.

Taulumenetelmä modaalilogiikalle K

- **Prefiksi** on ei-tyhjä äärellinen jono luonnollisia lukuja.

  Esim. $\langle 1 \rangle$ ja $\langle 11, 1, 1, 1, 111, 2 \rangle$ ovat prefiksejä.

- **Prefiksoitu lause** on muotoa σP, missä σ on prefiksi ja P lause.

  Esim. $\langle 1 \rangle (P \vee \neg P)$ ja $\langle 11, 1, 1, 111, 2 \rangle \Box\Box\Diamond P$ ovat prefiksoituja lauseita.

- σn on prefiksi, joka saadaan prefiksistä σ liittämällä sen perään luku n.

  Esim. Jos $\sigma = \langle 1 \rangle$, $\sigma 11 = \langle 1, 11 \rangle$.

- $\mathbf{K}$-saavutettavuus: Prefiksi muotoa σn on $\mathbf{K}$-saavutettavissa prefiksistä σ.

  Esim. $\langle 1, 11, 11 \rangle$ on $\mathbf{K}$-saavutettavissa prefiksistä $\langle 1, 11 \rangle$.

Taulusäännöt

σP: P tosi maailmassa σ.

- Lauselogiikan säännöt (prefiksoiduille lauseille):

$$\frac{\sigma\neg\neg P}{\sigma P} \qquad \frac{\sigma\alpha}{\begin{array}{c}\sigma\alpha_1\\ \sigma\alpha_2\end{array}} \qquad \frac{\sigma\beta}{\sigma\beta_1 \mid \sigma\beta_2}$$

Esimerkki.

1. $\langle 3,2,1 \rangle \neg((\neg P \to Q) \to P)$
2. $\langle 3,2,1 \rangle (\neg P \to Q)$ (1)
3. $\langle 3,2,1 \rangle \neg P$ (1)

4. $\langle 3,2,1 \rangle \neg\neg P$ (2)	5. $\langle 3,2,1 \rangle Q$ (2)
6. $\langle 3,2,1 \rangle P$ (4)	
$\times$	

Määritelmä. Prefiksi on haarassa
(i) **tarjolla**, jos se esiintyy haarassa,
(ii) **rajoittamaton**, jos ei ole minkään haarassa esiintyvän prefiksin alkuosa.

Esim. Prefiksi $\langle 1, 1 \rangle$ on prefiksien $\langle 1, 1, 12, 3 \rangle$ ja $\langle 1, 1 \rangle$ alkuosa.

- **Modaalisäännöt:**

  $\Box$: $$\frac{\sigma\Box P}{\sigma n P}$$

  mille tahansa tarjolla olevalle prefiksille σn.

  $\neg\Box$: $$\frac{\sigma\neg\Box P}{\sigma n \neg P}$$

  rajoittamattomalle prefiksille σn.

Esimerkki.

1. $\langle 1 \rangle \neg(\Box P \to \Box\Box P)$
2. $\langle 1 \rangle \Box P$ (1)
3. $\langle 1 \rangle \neg\Box\Box P$ (1)
4. $\langle 1, 1 \rangle \neg\Box P$ (3)
5. $\langle 1, 1 \rangle P$ (2)
6. $\langle 1, 1, 1 \rangle \neg P$ (4)

Määritelmä. Taulun haara on **suljettu**, jos se sisältää sekä σP että $\sigma\neg P$ jollekin lauseelle P ja prefiksille σ (tai jos se sisältää $\sigma\bot$ tai $\sigma\neg\top$).

Taulu on suljettu, jos jokainen sen haara on suljettu.

Lauseen P **todistus** on taulu, jonka juurena on $\langle 1\rangle\neg P$ ja joka on suljettu.

Esimerkki. Lauseen $\Box(P\wedge Q)\to(\Box P\wedge\Box Q)$ taulutodistus.

1. $\langle 1\rangle\neg(\Box(P\wedge Q)\to(\Box P\wedge\Box Q))$
2. $\langle 1\rangle\Box(P\wedge Q)$ (1)
3. $\langle 1\rangle\neg(\Box P\wedge\Box Q)$ (1)

4. $\langle 1\rangle\neg\Box P$	(3)	5. $\langle 1\rangle\neg\Box Q$	(3)
6. $\langle 1,2\rangle\neg P$	(4)	9. $\langle 1,3\rangle\neg Q$	(5)
7. $\langle 1,2\rangle P\wedge Q$	(2)	10. $\langle 1,3\rangle P\wedge Q$	(2)
8. $\langle 1,2\rangle P$	(7)	11. $\langle 1,3\rangle Q$	(10)
$\times$		$\times$	

Virheettömyys (soundius)

Teoreema. Jos lauseelle P löytyy todistus (suljettu taulu juurena $\langle 1\rangle\neg P$), lause P on $\mathbf{K}$-pätevä.

Todistus. (Seuraavien osatulosten avulla)

- Määritellään taululle $\mathbf{K}$-toteutuvuus: taulu on $\mathbf{K}$-toteutuva, jos sen jokin haara "vastaa" mallia.
- Osoitetaan, että
  (i) $\mathbf{K}$-toteutuva taulu ei voi sulkeutua,
  (ii) jos P ei ole $\mathbf{K}$-pätevä, taulu $\langle 1\rangle\neg P$ on $\mathbf{K}$-toteutuva,
  (iii) jokainen sääntö säilyttää $\mathbf{K}$-toteutuvuuden: jos taulu on **K-toteutuva** ennen säännön soveltamista, se on **K-toteutuva** myös säännön soveltamisen jälkeen.

  Tällöin jos P ei ole $\mathbf{K}$-pätevä, lauseen $\langle 1\rangle\neg P$ taulu säilyy avoimena.

$\boxed{\Rightarrow}$ Jos taulu prefiksoidulle lauseelle $\langle 1\rangle\neg P$ on suljettu, lause P on $\mathbf{K}$-pätevä.

Määritelmä. Taulu on **K-toteutuva**, jos joku sen haaroista on $\mathbf{K}$-toteutuva.

Taulun haara on **K-toteutuva**, jos haarassa esiintyvien prefiksoitujen lauseiden joukko on $\mathbf{K}$-toteutuva.

Joukko prefiksoituja lauseita Σ on $\mathbf{K}$-toteutuva, jos on olemassa malli $\mathcal{M}=\langle S,R,v\rangle$ ja kuvaus $\mathcal{N}$ Σ:ssa esiintyvistä prefikseistä joukolle S siten, että

1. Jos prefiksit σ ja τ esiintyvät joukossa Σ ja τ on $\mathbf{K}$-saavutettavissa prefiksistä σ, tällöin $\mathcal{N}(\sigma)R\mathcal{N}(\tau)$.
2. Jos $\sigma P\in\Sigma$, niin $\mathcal{M},\mathcal{N}(\sigma)\Vdash P$.

$\boxed{\Rightarrow}$ (i) $\mathbf{K}$-toteutuva taulu ei voi sulkeutua.

(ii) Jos lause P ei ole $\mathbf{K}$-pätevä, taulu $\langle 1\rangle\neg P$ on $\mathbf{K}$-toteutuva.

Näin on, koska lauseella $\neg P$ on malli $\mathcal{M}=\langle S,R,v\rangle$ siten, että $\mathcal{M},s'\Vdash\neg P$. Tällöin haara $\{\langle 1\rangle\neg P\}$ on $\mathbf{K}$-toteutuva kuvauksella $\mathcal{N}(\langle 1\rangle)=s'$.

(iii) Olkoon taulu Γ **K-toteutuva**.
Taulussa Γ on haara, jonka lauseet Σ ovat $\mathbf{K}$-toteutuvia mallilla $\mathcal{M}=\langle S,R,v\rangle$ ja kuvauksella $\mathcal{N}$.

Osoitetaan, että kun sovelletaan mitä tahansa taulusääntöä, näin saatava taulu Γ' on myös $\mathbf{K}$-toteutuva.

Sovelletetaan taulusääntöä $\mathbf{K}$-toteutuvaan haaraan:

- $\dfrac{\sigma\beta}{\sigma\beta_1 \mid \sigma\beta_2}$

  Tällöin taulussa Γ' haarat, joiden lausejoukot

  $\Sigma_1=\Sigma\cup\{\sigma\beta_1\}$
  $\Sigma_2=\Sigma\cup\{\sigma\beta_2\}$

  Koska $\sigma\beta\in\Sigma$, $\mathcal{M},\mathcal{N}(\sigma)\Vdash\beta$,

  joten $\mathcal{M},\mathcal{N}(\sigma)\Vdash\beta_1$ tai $\mathcal{M},\mathcal{N}(\sigma)\Vdash\beta_2$.

  $\boxed{\Rightarrow}$ Γ' **K-toteutuva**.

- $\dfrac{\sigma\alpha}{\begin{array}{c}\sigma\alpha_1\\ \sigma\alpha_2\end{array}}$ Samaan tapaan.

- $\dfrac{\sigma\Box P}{\sigma n P}$ tarjolla olevalle prefiksille σn.

  Tällöin taulussa Γ' haara, jonka lausejoukko $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\sigma n P\}$.

  Koska $\sigma\Box P \in \Sigma$, $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \Vdash \Box P$, joten kaikille t, $\mathcal{N}(\sigma) R t$, $\mathcal{M}, t \Vdash P$.

  Koska σn on $\mathbf{K}$-saavutettavissa σ:sta, $\mathcal{N}(\sigma) R \mathcal{N}(\sigma n)$. Siis $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma n) \Vdash P$.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Γ' **K-toteutuva**.

- $\dfrac{\sigma\neg\Box P}{\sigma n \neg P}$ rajoittamattomalle prefiksille σn.

  Tällöin taulussa Γ' haara, jonka lausejoukko $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\sigma n \neg P\}$.

  Koska $\sigma\neg\Box P \in \Sigma$, $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \Vdash \neg\Box P$, joten on olemassa t, $\mathcal{N}(\sigma) R t$, $\mathcal{M}, t \Vdash \neg P$.

  Koska σn ei ole mikään Σ prefiksin alkuosa, kuvausta $\mathcal{N}$ voidaan laajentaa: $\mathcal{N}(\sigma n) = t$. Tällöin $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma n) \Vdash \neg P$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Γ' **K-toteutuva**. ■

Täydellisyys

- Miten taata, että jokaiselle pätevälle lauseelle löytyy taulutodistus, kun taulun haarat voivat olla äärettömiä.

- Milloin sääntöjä on sovellettu riittävästi/reilusti?

$\boxed{\Rightarrow}$ Taulun rakentamiseen tarvitaan systemaattinen menetelmä, jossa kaikkia sääntöjä on käytetty riittävästi eli jokaiselle haaralle θ pätee:
(i) Jos $\sigma\beta \in \theta$, tällöin $\sigma\beta_1 \in \theta$ tai $\sigma\beta_2 \in \theta$.
(ii) Jos $\sigma\alpha \in \theta$, tällöin $\sigma\alpha_1 \in \theta$ ja $\sigma\alpha_2 \in \theta$.
(iii) Jos $\sigma\neg\Box Q \in \theta$, $\sigma n \neg Q \in \theta$, jollakin n.
(iv) Jos $\sigma\Box Q \in \theta$, $\sigma n Q \in \theta$ kaikilla σn, jotka tarjolla θ:ssa.

Huom! Systemaattinen menetelmä takaa täydellisyyden mutta voi sallia äärettömät taulut, jossei todistettava lause ole pätevä.
Ratkaisumenetelmä takaa, että taulun rakentaminen päättyy äärellisellä askelmäärällä, olipa todistettava lause pätevä tai ei.

Systemaattinen $\mathbf{K}$-taulu lauseelle P:

1. Taulun juureksi $\langle 1 \rangle \neg P$.
2. WHILE taulu ei ole suljettu eikä kaikkia lauseita merkitty käytetyiksi DO BEGIN
2.1 Valitaan taulusta ylin käyttämätön solmu σQ.
2.2 Jos Q ei ole literaali, jokaiselle avoimelle haaralle θ, joka kulkee σQ kautta:

- Jos σQ on muotoa $\sigma\alpha$, lisätään haaran θ loppuun ensin solmu $\sigma\alpha_1$ ja sitten $\sigma\alpha_2$.

- Jos σQ on muotoa $\sigma\beta$, lisätään θ:n loppuun kaksi lapsisolmua $\sigma\beta_1$ ja $\sigma\beta_2$ (haarautuminen).

- Jos σQ on muotoa $\sigma\neg\Box P$, lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n \neg P$ jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle σn.

- Jos σQ on muotoa $\sigma\Box P$, kaikille tässä haarassa tarjolla oleville σn lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n P$ sekä $\boxed{\text{lisäksi solmu } \sigma\Box P}$.

2.3 Merkitään σQ käytetyksi.
END.

Teoreema. (**Täydellisyys**) Jos P on $\mathbf{K}$-pätevä, lauseen P systemaattinen $\mathbf{K}$-taulu sulkeutuu.

Todistus. Osoitetaan, että jos lauseen P systemaattisessa $\mathbf{K}$-taulussa on avoin haara, P ei ole $\mathbf{K}$-pätevä.

Olkoon θ valmiin systemaattisen taulun avoin haara ja olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ seuraava malli.

1. S on θ:ssa esiintyvien prefiksien joukko.

2. $\sigma R \tau$ joss τ on $\mathbf{K}$-saavutettavissa σ:sta.

3. $v(\sigma, Q) = \mathrm{true}$ joss σQ esiintyy θ:ssa atomilauseelle Q.

Todistetaan induktiolla lauseen Q pituuden suhteen: jos $\sigma Q \in \theta$, niin $\mathcal{M}, \sigma \Vdash Q$.

(Tällöin koska $\langle 1 \rangle \neg P$ jokaisessa haarassa, $\mathcal{M}, \langle 1 \rangle \Vdash \neg P$, joten P ei ole $\mathbf{K}$-pätevä).

(literaali) Jos Q on atomilause ja $\sigma Q \in \theta$, niin $v(\sigma, Q) = \mathrm{true}$ ja $\mathcal{M}, \sigma \mid\vdash Q$.

Jos $\sigma\neg Q \in \theta$, Q on atomilause ja $\sigma Q \notin \theta$. Tällöin $\mathcal{M}, \sigma \mid\not\vdash Q$ ja $\mathcal{M}, \sigma \mid\vdash \neg Q$.

IH: Jos Q on lyhyempi kuin j ja $\sigma Q \in \theta$, $\mathcal{M}, \sigma \mid\vdash Q$. Olkoon lauseen Q pituus j.

(β) Jos $\sigma\beta \in \theta$, tällöin $\sigma\beta_1 \in \theta$ tai $\sigma\beta_2 \in \theta$.
[IH] $\mathcal{M}, \sigma \mid\vdash \beta_1$ tai $\mathcal{M}, \sigma \mid\vdash \beta_2$. Täten $\mathcal{M}, \sigma \mid\vdash \beta$.

(α) Jos $\sigma\alpha \in \theta$, tällöin $\sigma\alpha_1 \in \theta$ ja $\sigma\alpha_2 \in \theta$.
[IH] $\mathcal{M}, \sigma \mid\vdash \alpha_1$ ja $\mathcal{M}, \sigma \mid\vdash \alpha_2$. Täten $\mathcal{M}, \sigma \mid\vdash \alpha$.

($\neg\Box$) Jos $\sigma\neg\Box Q \in \theta$, $\sigma n\neg Q \in \theta$.
[IH] $\mathcal{M}, \sigma n \mid\vdash \neg Q$. Siis $\mathcal{M}, \sigma \mid\not\vdash \Box Q$, koska $\sigma R \sigma n$.

($\Box$) Jos $\sigma\Box Q \in \theta$, $\sigma n Q \in \theta$ kaikilla σn, jotka tarjolla θ:ssa.
[IH] $\mathcal{M}, \sigma n \mid\vdash Q$. Täten $\mathcal{M}, \sigma \mid\vdash \Box Q$.

Siis jokaiselle avoimelle haaralle θ:
jos $\sigma Q \in \theta$, $\mathcal{M}, \sigma \mid\vdash Q$. ■

Ratkaisuproseduuri (lauseen P $\mathbf{K}$-pätevyydelle):
1. Taulun juureksi $\langle 1\rangle\neg P$.
2. WHILE taulu ei ole suljettu eikä kaikkia lauseita merkitty käytetyiksi DO BEGIN
2.1 Valitaan taulusta ylin käyttämätön solmu σQ.
2.2 Jos Q ei ole literaali, jokaiselle haaralle θ, joka kulkee σQ kautta:

- Jos σQ on muotoa $\sigma\alpha$, lisätään haaran θ loppuun ensin solmu $\sigma\alpha_1$ ja sitten $\sigma\alpha_2$.
- Jos σQ on muotoa $\sigma\beta$, lisätään θ:n loppuun kaksi lapsisolmua $\sigma\beta_1$ ja $\sigma\beta_2$ (haarautuminen).
- Jos σQ on muotoa $\sigma\neg\Box P$ lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n\neg P$ jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle σn sekä tämän jälkeen $\sigma n X$ kullekin haarassa esiintyvälle $\sigma\Box X$.
- Jos σQ on muotoa $\sigma\Box P$, kaikille tässä haarassa tarjolla oleville σn lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n P$.

2.3 Merkitään σQ käytetyksi.
END.

Esimerkki. Tutkitaan taulumenetelmällä, onko $\Box P \to \Box\Box P$ $\mathbf{K}$-pätevä.

Rakennetaan $\mathbf{K}$-taulu ratkaisuproseduurilla.

1.	$\langle 1\rangle\neg(\Box P \to \Box\Box P)$	
2.	$\langle 1\rangle\Box P$	(1)
3.	$\langle 1\rangle\neg\Box\Box P$	(1)
4.	$\langle 1,2\rangle\neg\Box P$	(3)
5.	$\langle 1,2\rangle P$	(2/3)
6.	$\langle 1,2,3\rangle\neg P$	(4)

Koska taulu jää auki, voidaan avoimesta haarasta koota **vastamalli** $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä

$S = \{\langle 1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,2,3\rangle\}$
$R = \{\langle\langle 1\rangle, \langle 1,2\rangle\rangle, \langle\langle 1,2\rangle, \langle 1,2,3\rangle\rangle\}$ ja
$v(\sigma, P) = \mathrm{true}$ joss $\sigma = \langle 1,2\rangle$.

Nyt $\mathcal{M}, \langle 1\rangle \mid\not\vdash \Box P \to \Box\Box P$.

Muut modaalilogiikat

Laajennetaan edellä esitetty taulumenetelmä käsittelemään myös muita modaalilogiikoita kuin $\mathbf{K}$.

Määritelmä. Prefiksi τ on prefiksin σ **yksinkertainen jatko**, jos τ on muotoa σn jollekin n.

Taulumenetelmä modaalilogiikalle $\mathbf{L}$:

$\neg\Box$-sääntö:

$$\frac{\sigma\neg\Box P}{\tau\neg P} \qquad\qquad \frac{\sigma\Diamond P}{\tau P}$$

missä τ on haarassa rajoittamaton prefiksin σ yksinkertainen jatko.

$\Box$-sääntö:

$$\frac{\sigma\Box P}{\tau P} \qquad \frac{\sigma\neg\Diamond P}{\tau\neg P}$$

missä τ $\mathbf{L}$-saavutettavissa prefiksistä σ ja

1. logiikoille $\mathbf{K}, \mathbf{KB}, \mathbf{K4}$
   τ on tarjolla haarassa;
2. logiikoille $\mathbf{D}, \mathbf{T}, \mathbf{DB}, \mathbf{B}, \mathbf{D4}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$
   (i) τ on tarjolla haarassa tai
   (ii) τ on rajoittamaton prefiksin σ yksinkertainen jatko.

Määritelmä. Prefiksien saavutettavuusrelaatio:

1. yleinen, jos σn on saavutettavissa prefiksistä σ kaikilla n;
2. käänteinen, jos σ on saavutettavissa prefiksistä σn kaikilla n;
3. refleksiivinen, jos σ on saavutettavissa σ:sta;
4. transitiivinen, jos τ on saavutettavissa prefiksistä σ aina, kun σ on τ:n aito alkuosa.
5. universaalinen, jos prefiksi on saavutettavissa mistä tahansa prefiksistä.

Logiikka $\mathbf{L}$	$\mathbf{L}$-saavutettavuus
$\mathbf{K}, \mathbf{D}$	yleinen
$\mathbf{T}$	yleinen, refleksiivinen
$\mathbf{KB}, \mathbf{DB}$	yleinen, käänteinen
$\mathbf{B}$	yleinen, refleksiivinen, käänteinen
$\mathbf{K4}, \mathbf{D4}$	yleinen, transitiivinen
$\mathbf{S4}$	yleinen, refleksiivinen, transitiivinen
$\mathbf{S5}$	universaali

Esimerkkejä.

$\mathbf{D}$-taulutodistus lauseelle $\Box P \to \neg\Box\neg P$.

1. $\langle 1\rangle\neg(\Box P \to \neg\Box\neg P)$
2. $\langle 1\rangle\Box P$ (1)
3. $\langle 1\rangle\neg\neg\Box\neg P$ (1)
4. $\langle 1\rangle\Box\neg P$ (3)
5. $\langle 1,2\rangle\neg P$ (4) Huom. 2.(ii)
6. $\langle 1,2\rangle P$ (2)

$\times$

$\mathbf{T}$-taulutodistus lauseelle $\Box P \to P$.

1. $\langle 1\rangle\neg(\Box P \to P)$
2. $\langle 1\rangle\Box P$ (1)
3. $\langle 1\rangle\neg P$ (1)
4. $\langle 1\rangle P$ (2) Huom. refleksiivisyys

$\times$

$\mathbf{K4}$-taulutodistus lauseelle $\Box P \to \Box\Box P$.

1. $\langle 1\rangle\neg(\Box P \to \Box\Box P)$
2. $\langle 1\rangle\Box P$ (1)
3. $\langle 1\rangle\neg\Box\Box P$ (1)
4. $\langle 1,2\rangle\neg\Box P$ (3)
5. $\langle 1,2,3\rangle\neg P$ (4)
6. $\langle 1,2,3\rangle P$ (2) Huom. transit.

$\times$

$\mathbf{KB}$-taulutodistus lauseelle $P \to \Box\Diamond P$.

1. $\langle 1\rangle\neg(P \to \Box\Diamond P)$
2. $\langle 1\rangle P$ (1)
3. $\langle 1\rangle\neg\Box\Diamond P$ (1)
4. $\langle 1,2\rangle\neg\Diamond P$ (3)
5. $\langle 1\rangle\neg P$ (4) Huom. käänteisyys

$\times$

Systemaattinen $\mathbf{L}$-taulu lauseelle P

Kuten logiikalle $\mathbf{K}$, mutta kohta 2.2 tarkennettuna:
2.2 Jos Q ei ole literaali, jokaiselle avoimelle haaralle θ, joka kulkee σQ kautta:

- Jos σQ on muotoa $\sigma\neg\Box P$ ($\sigma\Diamond P$), lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n\neg P$ (σnP) jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle σn.

- Jos σQ on muotoa $\sigma\Box P$ ($\sigma\neg\Diamond P$),
(a) Kun $\mathbf{L}$ on $\mathbf{K}, \mathbf{KB}, \mathbf{K4}, \mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$:
jokaiselle θ:ssa tarjolla olevalle σ', joka on $\mathbf{L}$-saavutettavissa σ:sta, lisätään θ:n loppuun solmu $\sigma' P$ ($\sigma'\neg P$) ja lopuksi $\sigma\Box P$ ($\sigma\neg\Diamond P$).
(b) Kun $\mathbf{L}$ on $\mathbf{D}, \mathbf{DB}, \mathbf{D4}$:
jokaiselle θ:ssa tarjolla olevalle σ', joka on $\mathbf{L}$-saavutettavissa σ:sta, lisätään θ:n loppuun solmu $\sigma' P$ ($\sigma'\neg P$). Jos tällaisia prefiksejä σ' ei ole, lisätään θ:n loppuun solmu σnP ($\sigma n\neg P$) jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle σn. Kummassakin tapauksessa lisätään vielä haaran loppuun $\sigma\Box P$ ($\sigma\neg\Diamond P$).

S5-taulut

Prefikseinä riittävät luonnolliset luvut.

$\neg\Box$-sääntö: $\dfrac{n\neg\Box P}{k\neg P}$ $\quad$ $\dfrac{n\Diamond P}{kP}$

missä k ei esiinny haarassa.

$\Box$-sääntö: $\dfrac{n\Box P}{kP}$ $\quad$ $\dfrac{n\neg\Diamond P}{k\neg P}$

mille tahansa k.

Esimerkki. $\mathbf{S5}$-taulutodistus lauseelle $\neg\Box P \to \Box\neg\Box P$.

1.	$1\neg(\neg\Box P \to \Box\neg\Box P)$	
2.	$1\neg\Box P$	(1)
3.	$1\neg\Box\neg\Box P$	(1)
4.	$2\neg P$	(2)
5.	$3\neg\neg\Box P$	(3)
6.	$3\Box P$	(5)
7.	$2P$	(6)

$\times$

Systemaattinen menetelmä ($\mathbf{S5}$-pätevyydelle):
1. Taulun juureksi $1\neg P$.
2. WHILE taulu ei ole suljettu eikä kaikkia lauseita merkitty käytetyiksi DO BEGIN
2.1 Valitaan taulusta ylin käyttämätön solmu nQ.
2.2 Jos Q ei ole literaali, jokaiselle avoimelle haaralle θ, joka kulkee nQ kautta:

- Jos nQ on muotoa $n\alpha$, lisätään haaran θ loppuun ensin solmu $n\alpha_1$ ja sitten $n\alpha_2$.

- Jos nQ on muotoa $n\beta$, lisätään θ:n loppuun kaksi lapsisolmua $n\beta_1$ ja $n\beta_2$ (haarautuminen).

- Jos nQ on muotoa $n\neg\Box P$, lisätään haaran θ loppuun solmu $k\neg P$ jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle k sekä tämän jälkeen kX kullekin haarassa esiintyvälle $j\Box X$.

- Jos nQ on muotoa $n\Box P$, kaikille tässä haarassa tarjolla oleville k lisätään haaran θ loppuun solmu kP.

2.3 Merkitään nQ käytetyksi.
END.

KD45-taulut

Prefikseinä riittävät luonnolliset luvut.

$\neg\Box$-sääntö: $\dfrac{n\neg\Box P}{k\neg P}$ $\quad$ $\dfrac{n\Diamond P}{kP}$

missä k ei esiinny haarassa.

$\Box$-sääntö: $\dfrac{n\Box P}{kP}$ $\quad$ $\dfrac{n\neg\Diamond P}{k\neg P}$

mille tahansa $k \neq 1$.

Esimerkki. Vertaa.

$(\Box P \to P)$:

1.	$1\neg(\Box P \to P)$	
2.	$1\Box P$	(1)
3.	$1\neg P$	(1)

$\Box(\Box P \to P)$:

1.	$1\neg\Box(\Box P \to P)$	
2.	$2\neg(\Box P \to P)$	(1)
3.	$2\Box P$	(2)
4.	$2\neg P$	(2)
5.	$2P$	(3)

$\times$

Looginen seuraavuus taulumenetelmällä

Tehtävä: $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$

Taulumenetelmä: asetetaan taulun juureksi $\langle 1 \rangle \neg P$ ja käytetään taulun rakentamiseen $\mathbf{L}$-logiikan mukaisia taulusääntöjä, joiden lisäksi voidaan käyttää kahta uutta sääntöä premisseille:

Globaali sääntö: solmulla σQ voidaan jatkaa mitä tahansa haaraa mille tahansa haarassa tarjolla olevalla prefiksillä σ ja mille tahansa $Q \in \Sigma$.

Lokaali sääntö: solmulla $\langle 1 \rangle Q$ voidaan jatkaa mitä tahansa haaraa mille tahansa $Q \in \Upsilon$.

Esimerkki. $\{P\} \models_{\mathbf{K}} \{\Box P \to Q\} \Longrightarrow Q$:

1. $\langle 1 \rangle \neg Q$
2. $\langle 1 \rangle \Box P \to Q$ (LP)

3. $\langle 1 \rangle \neg \Box P$ (2)	4. $\langle 1 \rangle Q$ (2)
5. $\langle 1, 2 \rangle \neg P$ (2)	$\times$
6. $\langle 1, 2 \rangle P$ (GP)	
$\times$	