Tik-79.146 **Kevät 2001/IN**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Tentti 8.5.2001

1. a) Selitä lyhyesti, mikä on (klassinen) tautologia modaalilogiikassa. Onko lause $\Box P \rightarrow (\Box(Q \wedge \Box R) \rightarrow \Box P)$ klassinen tautologia? Perustele vastauksesi.

b) Päteekö mille tahansa kehysjoukolle $\mathbf{L}$, lausejoukolle Υ, lauseelle P ja lausejoukoille Σ ja Σ' siten, että $\Sigma \subseteq \Sigma'$: jos $\Sigma' \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$, niin $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$? Perustele vastauksesi lyhyesti.

c) Anna kahden agentin tietämyslogiikan $\mathbf{S5}_2$ mukainen malli, jossa lause $K_2(K_1 P \vee K_1 \neg P)$ on tosi jossain mallin tilassa muttei ole pätevä mallissa. Tässä **S5** on refleksiivisten, symmetristen ja transitiivisten kehysten luokka, K_1 ja K_2 ovat modaalioperaattoreita agenttien 1 ja 2 tietämykselle ja P on atomilause.

2. Tutki taulumenetelmällä, pitääkö annettu väite paikkansa. Anna (vasta)malli, kun se on mahdollista.

a) $\{\} \models_{\mathbf{B}} \{\Box(Q \rightarrow \Box P)\} \Longrightarrow \Box\Diamond(Q \rightarrow \Diamond P)$, missä **B** on symmetristen ja refleksiivisten kehysten luokka.

b) $\{\Diamond P \leftrightarrow \Box P\} \models_{\mathbf{K}} \{\} \Longrightarrow \Box P \rightarrow (P \vee \Diamond\Box P)$, missä **K** on kaikkien kehysten luokka.

c) On olemassa sarjalliseen kehykseen perustuva malli ja siinä tila, jossa lause $\Box(\neg\Box P \rightarrow \Box\Diamond\neg P)$ on tosi mutta lause $\Diamond\Box(\Box P \rightarrow P)$ epätosi.

P ja Q ovat atomilauseita.

3. a) Määrittele, mitä tarkoittaa modaalilogiikalle L annetun todistusmenetelmän virheettömyys (soundius) ja täydellisyys.

b) Insinööri Sörsselsson on kehittänyt joukon uusia todistusmenetelmiä eri modaalilogiikoille. Kehyslogiikalle **KB** hänen menetelmällään voidaan todistaa lause $\Box(\Box P \vee \Box Q) \rightarrow \Diamond\Box(P \vee Q)$, missä **KB** on symmetristen kehysten luokka. Mitä voit sanoa tämän perusteella menetelmän virheettömyydestä? Perustele vastauksesi.

c) Insinööri Sörsselsson on huolissaan todistusmenetelmiensä täydellisyydestä. Kehyslogiikalle **K4** hänen menetelmällään ei voida todistaa lausetta $\Box\Diamond P \rightarrow \Box\Diamond\Box P$, missä **K4** on transitiivisten kehysten luokka. Mitä voit sanoa tämän perusteella menetelmän täydellisyydestä? Perustele vastauksesi.

4. a) Anna LTL-malli, jossa lause $\mathbf{GF}P \wedge \mathbf{GF}Q$ on toteutuva, mutta $\mathbf{FG}P \rightarrow \mathbf{GF}Q$ ei ole (P ja Q ovat atomilauseita).

b) Olkoon $\langle S, R, v\rangle$ tarkasteltavan järjestelmän CTL-malli, missä $S = \{a, b, c, d, e\}$,
$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle b, e\rangle, \langle e, b\rangle, \langle e, d\rangle, \langle d, c\rangle\}$,
$v(b, \texttt{ack}) = \text{true}$, $v(a, \texttt{ack}) = v(c, \texttt{ack}) = v(d, \texttt{ack}) = v(e, \texttt{ack}) = \text{false}$,
$v(a, \texttt{req}) = v(c, \texttt{req}) = v(d, \texttt{req}) = v(e, \texttt{req}) = \text{true}$, $v(b, \texttt{req}) = \text{false}$.
Anna ne mallin tilat, joissa lause $\neg\mathbf{A}((\neg\mathbf{AX}\texttt{ack})\mathbf{U}(\neg\mathbf{EX}\texttt{req}))$ on tosi.

c) Tutki, onko CTL-lause

$$(P \vee \mathbf{EXEF}P) \rightarrow \mathbf{EF}P$$

on pätevä taulumenetelmällä (P on atomilause).

Relaation R ominaisuuksia:
Refleksiivisyys: $\forall s(sRs)$
Symmetrisyys: $\forall s \forall t(sRt \rightarrow tRs)$
Sarjallisuus: $\forall s \exists t(sRt)$
Transitiivisuus: $\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge tRu \rightarrow sRu)$