**Tik-79.146** **Kevät 2000**
**Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I**
**Laskuharjoitus 9**
**Ratkaisut**

1. **S4** on refleksiivisten ja transitiivisten kehysten joukko. Lause käännetään predikaattikalkyylimuotoon:

$$\begin{aligned}
\tau(\neg\Box\Box P \to \neg\Box P, x) &= \tau(\neg\Box\Box P, x) \to \tau(\neg\Box P, x) \\
&= \neg\tau(\Box\Box P, x) \to \neg\tau(\Box P, x) \\
&= \neg\forall y\big(R(x,y) \to \tau(\Box P, y)\big) \\
&\qquad \to \neg\forall y\big(R(x,y) \to \tau(P, y)\big) \\
&= \neg\forall y\Big(R(x,y) \to \forall x\big(R(y,x) \to \tau(P,x)\big)\Big) \\
&\qquad \to \neg\forall y\big(R(x,y) \to P(y)\big) \\
&= \neg\forall y\Big(R(x,y) \to \forall x\big(R(y,x) \to P(x)\big)\Big) \\
&\qquad \to \neg\forall y\big(R(x,y) \to P(y)\big) \\
&= \varphi
\end{aligned}$$

$$T\,(\forall x R(x,x))$$
$$T\,(\forall x \forall y \forall z R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))^{11.x/a,y/b,z/c}$$
$$F\,(\forall x \varphi)^{1.x/a}$$
$$\vert$$
$$F\,\Big(\neg\forall y\Big(R(a,y) \to \forall x\big(R(y,x) \to P(x)\big)\Big) \to \neg\forall y\big(R(a,y) \to P(y)\big)\Big)^{2.}$$
$$\vert$$
$$T\,\Big(\neg\forall y\Big(R(a,y) \to \forall x\big(R(y,x) \to P(x)\big)\Big)\Big)^{3.}$$
$$F\,\big(\neg\forall y\big(R(a,y) \to P(y)\big)\big)^{4.}$$
$$\vert$$
$$F\,\Big(\forall y\Big(R(a,y) \to \forall x\big(R(y,x) \to P(x)\big)\Big)\Big)^{5.y/b}$$
$$\vert$$
$$T\,\big(\forall y\big(R(a,y) \to P(y)\big)\big)^{9.y/c}$$
$$\vert$$
$$F\,\big(R(a,b) \to \forall x\big(R(b,x) \to P(x)\big)\big)^{6.}$$
$$\vert$$
$$T\,(R(a,b))$$
$$F\,\big(\forall x\big(R(b,x) \to P(x)\big)\big)^{7.x/c}$$
$$\vert$$
$$F\,(R(b,c) \to P(c))^{8.}$$
$$\vert$$
$$T\,(R(b,c))$$
$$F\,(P(c))$$
$$\vert$$
$$T\,(R(a,c) \to P(c))^{10.}$$
$$\begin{array}{cc}
\swarrow & \searrow \\
F\,(R(a,c)) & T\,(P(c)) \\
\vert & \otimes \\
T\,(R(a,b) \wedge R(b,c) \to R(a,c))^{12.} &
\end{array}$$
$$\begin{array}{cc}
\swarrow & \searrow \\
F\,(R(a,b) \wedge R(b,c))^{13.} & T\,(R(a,c)) \\
 & \otimes
\end{array}$$
$$\begin{array}{cc}
\swarrow & \searrow \\
F\,(R(a,b)) & F\,(R(b,c)) \\
\otimes & \otimes
\end{array}$$

2. Jos kehys $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$, $|S| = n$ ja $R \subseteq S \times S$, niin kehysten määrä on

$$|\mathcal{P}(S \times S)| = 2^{n^2}.$$

Jos siis $n = 10$, saadaan $2^{100} \approx 1.3 \cdot 10^{30}$ erilaista kehystä.

(Toisaalta kahta kehystä voidaan pitää samoina, jos kehyksiä kuvaavat graafit ovat isomorfiset. Silloin kehysten määrä on

$$12005168.$$

Tämä tulos saadaan Polyan enumeraatioteorian avulla.)

3. a) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_1 P$, koska $v(s_1, P) = v(s_2, P) = \textbf{true}$, ja $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_2 P$ ja $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_3 P$, koska $v(s_1, P) = \textbf{true}$ . Siten $\mathcal{M}, s_1 \Vdash EP$.

   b) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_2 EP$ ja $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_3 EP$, koska $\mathcal{M}, s_1 \Vdash EP$. Lisäksi
   $\mathcal{M}, s_2 \Vdash K_1 P$, koska $v(s_1, P) = v(s_2, P) = \textbf{true}$,
   $\mathcal{M}, s_2 \Vdash K_2 P$, koska $v(s_2, P) = v(s_3, P) = \textbf{true}$ ja
   $\mathcal{M}, s_2 \Vdash K_3 P$, koska $v(s_2, P) = \textbf{true}$. Siten
   $\mathcal{M}, s_2 \Vdash EP$, mistä seuraa, että
   $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_1 EP$. Siis
   $\mathcal{M}, s_1 \Vdash EEP$.

   Toisaalta tulos saadaan myös, jos huomataan, että $P$ on tosi kaikissa maailmoissa, jotka ovat saavutettavissa $s_1$:stä kahdella askeleella.

   c) $\mathcal{M}, s_1 \nVdash CP$, koska $s_4$ on C-saavutettavissa $s_1$:stä ja $v(s_4, P) = \textbf{false}$.