Tik-79.146 **Kevät 2000**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 6
Ratkaisut

Aksioomat ja päättelysäännöt:

$$
\begin{array}{rl}
\text{K:} & \Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q) \\
\text{T:} & \Box P \to P \\
\text{D:} & \Box P \to \Diamond P \quad \text{tai} \quad \Box P \to \neg\Box\neg P \\
\text{4:} & \Box P \to \Box\Box P \\
\text{5:} & \neg\Box P \to \Box\neg\Box P \\
\text{MP:} & \dfrac{P, P \to Q}{Q} \\
\text{N:} & \dfrac{P}{\Box P}
\end{array}
$$

1. a)

1.	$P \to (Q \to P)$	[Tautologia]
2.	$\Box\big(P \to (Q \to P)\big)$	[N, 1]
3.	$\Box\big(P \to (Q \to P)\big) \to \big(\Box P \to \Box(Q \to P)\big)$	[K]
4.	$\Box P \to \Box(Q \to P)$	[MP, 2, 3]

b)

1.	$\Box(P \to Q)$	[GP]
2.	$(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$	[Tautologia]
3.	$\Box\big((P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)\big)$	[N, 2]
4.	$\Box\big((P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)\big) \to \big(\Box(P \to Q) \to \Box(\neg Q \to \neg P)\big)$	[K]
5.	$\Box(P \to Q) \to \Box(\neg Q \to \neg P)$	[MP, 3, 4]
6.	$\Box(\neg Q \to \neg P)$	[MP, 1, 5]
7.	$\Box(\neg Q \to \neg P) \to (\Box\neg Q \to \Box\neg P)$	[K]
8.	$\Box\neg Q \to \Box\neg P$	[MP, 6, 7]
9.	$(\Box\neg Q \to \Box\neg P) \to (\neg\Box\neg P \to \neg\Box\neg Q)$	[Tautologia]
10.	$\neg\Box\neg P \to \neg\Box\neg Q$	[MP, 8, 9]

2. a)

1.	$P \to Q$	[GP]
2.	$\neg Q \to P$	[GP]
3.	$(P \to Q) \to \big((\neg Q \to P) \to Q\big)$	[Tautologia]
4.	$(\neg Q \to P) \to Q$	[MP, 1, 3]
5.	Q	[MP, 2, 4]
6.	$\Box Q$	[N, 5]
7.	$\neg Q \vee S$	[LP]
8.	$(\neg Q \vee S) \to (Q \to S)$	[Tautologia]
9.	$Q \to S$	[MP, 7, 8]
10.	S	[MP, 5, 9]
11.	$\Box Q \to (S \to \Box Q \wedge S)$	[Tautologia]
12.	$S \to \Box Q \wedge S$	[MP, 6, 11]
13.	$\Box Q \wedge S$	[MP, 10, 12]

b)

1.	$Q \to \neg P$	[GP]
2.	$\Box(Q \to \neg P)$	[N, 1]
3.	$\Box(Q \to \neg P) \to (\Box Q \to \Box\neg P)$	[K]
4.	$\Box Q \to \Box\neg P$	[MP, 2, 3]
5.	$\Diamond Q \to \Box Q$	[GP]
6.	$(\Diamond Q \to \Box Q) \to$ $\big((\Box Q \to \Box\neg P) \to (\Diamond Q \to \Box\neg P)\big)$	[Tautologia]
7.	$(\Box Q \to \Box\neg P) \to (\Diamond Q \to \Box\neg P)$	[MP, 5, 6]
8.	$\Diamond Q \to \Box\neg P$	[MP, 4, 7]
9.	$(\neg\Box\neg Q \to \Box\neg P) \to (\neg\Box\neg P \to \Box\neg Q)$	[Tautologia]
10.	$\neg\Box\neg P \to \Box\neg Q$	[MP, 8, 9]
11.	$\Diamond P$	[LP]
12.	$\Box\neg Q$	[MP, 10, 11]

3.

1.	$\neg\Box P \to \Box\neg\Box P$	[5]
2.	$(\neg\Box P \to \Box\neg\Box P) \to (\neg\Box\neg\Box P \to \Box P)$	[Tautologia]
3.	$\neg\Box\neg\Box P \to \Box P$	[MP, 1, 2]
4.	$\Box\Box P$	[GP]
5.	$\Box\Box P \to \neg\Box\neg\Box P$	[D]
6.	$\neg\Box\neg\Box P$	[MP, 4, 5]
7.	$\Box P$	[MP, 6, 3]

4. a) Huomataan, että

$$\begin{aligned}
\Sigma \vdash \emptyset &\Longrightarrow \neg\big(\top \wedge A \wedge B \wedge \neg(A \wedge B)\big),\\
\Sigma \vdash \emptyset &\Longrightarrow \neg\big(\top \wedge \neg A \wedge (A \wedge B)\big)
\end{aligned}$$

ja

$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge \neg B \wedge (A \wedge B)\big),$$

koska ne ovat tautologioita. Koska Δ on Σ-maksimaalinen, ei voi olla mahdollista, että $A \wedge B \notin \Delta$, $A \in \Delta$ ja $B \in \Delta$, eikä myöskään voi olla $A \wedge B \in \Delta$ ja $A \notin \Delta$ eikä $A \wedge B \in \Delta$ ja $B \notin \Delta$. Siis $A \wedge B \in \Delta$ joss $A \in \Delta$ ja $B \in \Delta$.

b) Samasta syystä

$$\begin{aligned}
\Sigma \vdash \emptyset &\Longrightarrow \neg\big(\top \wedge \neg A \wedge \neg(A \to B)\big),\\
\Sigma \vdash \emptyset &\Longrightarrow \neg\big(\top \wedge B \wedge \neg(A \to B)\big),
\end{aligned}$$

ja

$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge A \wedge \neg B \wedge (A \to B)\big),$$

eli $A \to B \in \Delta$ joss $A \notin \Delta$ tai $B \in \Delta$.

c) Vastaavasti

$$\begin{aligned}
\Sigma \vdash \emptyset &\Longrightarrow \neg\big(\top \wedge A \wedge \neg(A \vee B)\big),\\
\Sigma \vdash \emptyset &\Longrightarrow \neg\big(\top \wedge B \wedge \neg(A \vee B)\big),
\end{aligned}$$

ja

$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge (A \vee B)\big)$$

ja $A \vee B \in \Delta$ joss $A \in \Delta$ tai $B \in \Delta$.

5. **S4** on **KT4**.

1.	$\neg\bot$	[Tautologia]
2.	$\Box\bot \to \bot$	[T]
3.	$(\Box\bot \to \bot) \to (\neg\bot \to \neg\Box\bot)$	[Tautologia]
4.	$\neg\bot \to \neg\Box\bot$	[MP, 2, 3]
5.	$\neg\Box\bot$	[MP, 1, 4]