Tik-79.146 **Kevät 2000**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 5
Ratkaisut

1. a) Oletetaan, että kehys $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$ on euklidinen. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ malli ja $s \in S$ jokin sen maailma siten, että $\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box P$. Silloin

$$\mathcal{M}, s \nVdash \Box P,$$

ja

$$\exists t : \langle s, t\rangle \in R \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, t \nVdash P.$$

Oletetaan, että $\langle s, u\rangle \in R$. Koska $\langle s, t\rangle \in R$, kehyksen euklidisuudesta seuraa, että $\langle u, t\rangle \in R$. Siis

$$\mathcal{M}, u \nVdash \Box P,$$

ja

$$\mathcal{M}, u \Vdash \neg\Box P.$$

Koska u on mielivaltainen, $\mathcal{M}, s \Vdash \Box\neg\Box P$, ja on todistettu

$$\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box P \to \Box\neg\Box P.$$

Täten

$$\mathcal{M} \models \neg\Box P \to \Box\neg\Box P,$$

ja koska $\mathcal{M}$ on mielivaltainen,

$$\mathcal{F} \models \neg\Box P \to \Box\neg\Box P.$$

b) Oletetaan, että kehykselle $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$ pätee

$$\mathcal{F} \models \Box P \to \Diamond P.$$

Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$. Jos

$$\mathcal{M}, s \nVdash \Box P,$$

niin

$$\exists t : \langle s, t\rangle \in R \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, t \nVdash P.$$

Toisaalta, jos

$$\mathcal{M}, s \Vdash \Box P,$$

niin

$$\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond P,$$

joten

$$\exists t : \langle s, t\rangle \in R \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, t \Vdash P.$$

Siis $\mathcal{F}$ on sarjallinen.

c) Olkoon $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$ transitiivinen kehys. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$. Jos

$$\mathcal{M}, s \Vdash \Box P,$$

niin

$$\mathcal{M}, t \Vdash P$$

kaikilla $t \in S$, joille $\langle s, t\rangle \in R$. Olkoon $u \in S$ siten, että $\langle s, u\rangle \in R$. Jos

$$\langle u, v\rangle \in R,$$

niin

$$\langle s, v\rangle \in R$$

transitiivisuuden perusteella. On siis oltava $\mathcal{M}, v \Vdash P$, jolloin pätee myös $\mathcal{M}, u \Vdash \Box P$, ja siis

$$\mathcal{M}, s \Vdash \Box\Box P.$$

Täten

$$\mathcal{F} \models \Box P \to \Box\Box P.$$

2. Oletetaan, että $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$ on refleksiivinen ja euklidinen. Jos sRt, niin myös sRs, mikä seuraa kehyksen refleksiivisyydestä. Euklidisuudesta seuraa nyt tRs eli symmetrisyys. Oletetaan sitten, että sRt ja tRu. Symmetrisyyden perusteella tRs, ja euklidisuudesta puolestaan seuraa, että sRu. Näin transitiivisuus on todistettu.

3. **KD45** = sarjalliset, transitiiviset ja euklidiset kehykset. Todistetaan **KD45** $\not\models \neg(\neg P \wedge \Box\Box P)$ konstruoimalla malli

$$\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$$

siten, että jollekin sen maailmalle $s \in S$

$$\mathcal{M}, s \nVdash \neg(\neg P \wedge \Box\Box P).$$

Silloin

$$\mathcal{M}, s \Vdash \neg P \wedge \Box\Box P$$

eli

$$\mathcal{M}, s \Vdash \neg P \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s \Vdash \Box\Box P.$$

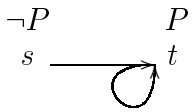
Sarjallisuuden perusteella $\exists t \in S : sRt$. Siksi

$$\mathcal{M}, t \Vdash \Box P.$$

Euklidisuudesta seuraa, että tRt, ja todetaan, että

$$\mathcal{M}, t \Vdash P.$$

Näin $\mathcal{M}$:



toteuttaa

$$\mathcal{M}, s \nVdash \neg(\neg P \wedge \Box\Box P).$$

Huomataan, että $\mathcal{M}$ on sarjallinen, transitiivinen ja euklidinen.