Tik-79.146 **Kevät 2000**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 4
Ratkaisut

1. $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$:

$$\begin{tikzcd} s_1 \arrow[r] & s_2 \arrow[d] \\ s_4 \arrow[u] & s_3 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{F}' = \langle S', R' \rangle$, missä $S' = \{r_1, r_2\}$ ja $R' = \{\langle r_1, r_2 \rangle,\ \langle r_2, r_1 \rangle\}$:

$$\begin{tikzcd} r_1 \arrow[d, bend left] \\ r_2 \arrow[u, bend left] \end{tikzcd}$$

Löydetään p-morfismi f:

$$f(s_1) = f(s_3) = r_1$$
$$f(s_2) = f(s_4) = r_2$$

Funktio f on p-morfismi, koska

1. f on selvästi surjektiivinen
2. $\forall s, t \in S\ sRt$ implikoi $f(s)R'f(t)$
3. $\forall s \in S\ \forall t \in S'\ f(s)R't$ implikoi $\exists u \in S\ sRu$ ja $f(u) = t$.

P-morfismiproposition perusteella

$$\mathcal{F} \models P \quad \text{implikoi} \quad \mathcal{F}' \models P.$$

2. $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s \rangle,\ \langle s, t \rangle\}$, $v(s, P) = \text{false}$, ja $v(t, P) = \text{true}$.

$$\begin{tikzcd} \overset{\neg P}{s} \arrow[loop below] \arrow[r] & t\ P \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M} \models \Box P \to P$ pätee, ja $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond\neg P$ pätee myös, koska $\langle s, s \rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s \Vdash \neg P$. Koska kuitenkin $\mathcal{M}, t \Vdash P$ ja $\langle s, t \rangle \in R$, niin $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\neg P$, mistä edelleen seuraa, että $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\Box\neg P$. Siis $\mathcal{M}$ on vastaesimerkki.

3. $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t \rangle, \ \langle t, t \rangle\}$, $v(s, P) = v(s, Q) = v(t, Q) =$ true, ja $v(t, P) =$ false.

$$\begin{tikzcd} \begin{matrix} P \\ Q\ s \end{matrix} \arrow[r] & \begin{matrix} \neg P \\ t\ Q \end{matrix} \arrow[loop below] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M} \models \Diamond Q$ pätee, ja $\mathcal{M}, s \Vdash P \leftrightarrow Q$ pätee myös. Koska kuitenkin $\mathcal{M}, s \Vdash \Box Q$ ja $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P$, niin $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P \leftrightarrow \Box Q$. Siis $\mathcal{M}$ on vastaesimerkki.

4. Oletetaan, että

$$\Sigma \cup \{P\} \not\models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow Q.$$

Silloin on olemassa $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ siten, että

$$\mathcal{M} \models \Sigma \cup \{P\}$$

ja

$$\exists s \in S : \mathcal{M}, s \Vdash \Upsilon, \quad \text{mutta} \quad M, s \nVdash Q.$$

Erityisesti $\mathcal{M}, t \Vdash P$ kaikilla $t \in S$, joten

$$\mathcal{M}, s \Vdash P \wedge \Box P \wedge \Box\Box P \wedge \Box\Box\Box P.$$

Myös $\mathcal{M} \models \Sigma$, joten

$$\Sigma \not\models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P \wedge \Box P \wedge \Box\Box P \wedge \Box\Box\Box P \to Q.$$