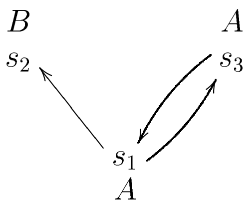
Tik-79.146 **Kevät 2000**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 3
Ratkaisut

1. $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$



a) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box A$ ei päde, koska $\mathcal{M}, s_2 \nVdash A$.

b) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box\Diamond\top$ pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Diamond\top \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Diamond\top.$$

Koska ei kuitenkaan ole olemassa maailmaa $s \in S$ siten, että $\langle s_2, s \rangle \in R$, seuraa, että $\mathcal{M}, s_2 \nVdash \Diamond\top$, ja edelleen, että $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box\Diamond\top$ ei päde.

c) $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Box\Box\bot$ pätee, joss $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box\Box\bot$, joka puolestaan pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box\bot \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\bot.$$

$\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\bot$ ei kuitenkaan päde, koska $\mathcal{M}, s_1 \nVdash \bot$. Ei siis päde $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Box\Box\bot$.

d) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box(B \lor \Box\Diamond B)$ pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_2 \Vdash B \lor \Box\Diamond B \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash B \lor \Box\Diamond B.$$

$\mathcal{M}, s_2 \Vdash B \lor \Box\Diamond B$ pätee, koska $\mathcal{M}, s_2 \Vdash B$. $\mathcal{M}, s_3 \Vdash B \lor \Box\Diamond B$ pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_3 \Vdash B \quad \text{tai} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Diamond B.$$

Nyt $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box\Diamond B$, joss $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond B$, joka pätee, koska $\mathcal{M}, s_2 \Vdash B$. Siis $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box(B \lor \Box\Diamond B)$ pätee.

e) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond(\Box A \wedge \Box\neg A)$ pätee, joss

$$\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box A \wedge \Box\neg A \quad \text{tai} \quad \mathcal{M}, s_3 \Vdash \Box A \wedge \Box\neg A.$$

Nähdään, että $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box A \wedge \Box\neg A$ pätee, koska sekä $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box A$ että $\mathcal{M}, s_2 \Vdash \Box\neg A$, mikä seuraa siitä, että ei ole olemassa maailmaa $s \in S$ siten, että $\langle s_2, s\rangle \in R$.

2. a) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s\}$, $R = \varnothing$, ja $v(s, A) = \text{false}$.

$$\mathcal{M}, s \Vdash \Box A, \quad \text{mutta} \quad \mathcal{M}, s \nVdash A.$$

Siis $\mathcal{M}, s \nVdash \Box A \to A$.

b) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle,\ \langle t, s\rangle\}$, $v(s, A) = \text{false}$, ja $v(t, A) = \text{true}$.

$$\neg A\ s \rightleftarrows t\ A$$

$\mathcal{M}, s \Vdash \Box A$, mutta $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\Box A$, koska $\mathcal{M}, t \nVdash \Box A$. Täten $\mathcal{M}, s \nVdash \Box A \to \Box\Box A$.

c) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle\}$, $v(t, A) = \text{false}$.

$$s \longrightarrow t\ \neg A$$

$\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box A$, koska $\mathcal{M}, s \nVdash \Box A$. $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\neg\Box A$, koska $\mathcal{M}, t \Vdash \Box A$. Siis $\mathcal{M}, s \nVdash \neg\Box A \to \Box\neg\Box A$.

3. a) Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$.

($\Rightarrow$) Olkoon $s \in S$. Koska $\Diamond\top$ on pätevä mallissa, se on tosi mallin jokaisessa maailmassa, joten $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond\top$. Tällöin on olemassa $t \in S$ siten että $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash \top$. Tästä seuraa, että

$$\text{jos} \quad \mathcal{M}, s \Vdash \Box A, \quad \text{niin myös} \quad \mathcal{M}, t \Vdash A,$$

ja siksi

$$\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A.$$

(Jos $\mathcal{M}, s \nVdash \Box A$, implikaatio on myös silloin tosi.)

Siten $\mathcal{M}, s \Vdash \Box A \to \Diamond A$ kaikilla $s \in S$, mistä seuraa, että

$$\mathcal{M} \Vdash \Box A \to \Diamond A.$$

($\Leftarrow$) Oletetaan, että $\mathcal{M} \Vdash \Box A \to \Diamond A$, ja olkoon $s \in S$. Jos on olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t\rangle \in R$, niin

$$\mathcal{M}, t \Vdash \top, \quad \text{ja tällöin} \quad \mathcal{M}, s \Vdash \Diamond\top.$$

Ellei näin ole, niin $\mathcal{M}, s \Vdash \Box A$, ja silloin on myös oltava oletuksen perusteella $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A$. Tästä kuitenkin seuraa, että on olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t \rangle \in R$ (ja $\mathcal{M}, t \Vdash A$), mikä johtaa ristiriitaan.

b) $F = \langle S, R \rangle$, $S = \{s\}$ ja $R = \varnothing$. $F \Vdash \Box\bot$, koska ei ole olemassa maailmaa $t \in S$ siten, että $\langle s, t \rangle \in R$. Siis kaikilla $t \in S$ $\langle s, t \rangle \in R$ implikoi $F, t \Vdash \bot$.