Tik-79.146 **Kevät 2000**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 2
Ratkaisut

1. a)

$$T\,(\exists x_1 \exists x_2 P(x_1,x_2) \wedge \forall x_1 \forall x_2 (P(x_1,x_2) \rightarrow P(x_2,x_1)))^{1.}$$
$$\Big|$$
$$T\,(\exists x_1 \exists x_2 P(x_1,x_2))^{2.\,x_1/c}$$
$$T\,(\forall x_1 \forall x_2 (P(x_1,x_2) \rightarrow P(x_2,x_1)))^{4.\,x_1/c}$$
$$\Big|$$
$$T\,(\exists x_2 P(c,x_2))^{3.\,x_2/d}$$
$$\Big|$$
$$T\,(P(c,d))$$
$$\Big|$$
$$T\,(\forall x_2 (P(c,x_2) \rightarrow P(x_2,c)))^{5.\,x_2/d}$$
$$\Big|$$
$$T\,(P(c,d) \rightarrow P(d,c))$$
$$F\,(P(c,d)) \qquad T\,(P(d,c))$$
$$\otimes$$

Tästä saadaan rakenne (struktuuri) $\mathcal{A}$. Merkitään

$$\mathcal{A} = \{1,2\},$$

ja määritellään

$$c^{\mathcal{A}} = 1, \qquad d^{\mathcal{A}} = 2 \quad \text{sekä} \quad P^{\mathcal{A}} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}.$$

Tarkistetaan, että lause on tosi rakenteessa. Koska esim. $\langle 1,2\rangle = \langle c^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}\rangle \in P^{\mathcal{A}}$, niin

$$\mathcal{A} \models \exists x_1 \exists x_2 P(x_1,x_2).$$

Myös

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \forall x_2 (P(x_1,x_2) \rightarrow P(x_2,x_1)),$$

on voimassa, koska

$$\mathcal{A} \models P(c,c) \rightarrow P(c,c),$$
$$\mathcal{A} \models P(c,d) \rightarrow P(d,c),$$
$$\mathcal{A} \models P(d,c) \rightarrow P(c,d) \text{ ja}$$
$$\mathcal{A} \models P(d,d) \rightarrow P(d,d),$$

sillä $c^{\mathcal{A}} = 1, d^{\mathcal{A}} = 2, \langle c^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}} \rangle = \langle 1, 1 \rangle \notin P^{\mathcal{A}}, \langle c^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}} \rangle = \langle 1, 2 \rangle \in P^{\mathcal{A}}, \langle d^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}} \rangle = \langle 2, 1 \rangle \in P^{\mathcal{A}}$ ja $\langle d^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}} \rangle = \langle 2, 2 \rangle \notin P^{\mathcal{A}}$.

b) Käytetään rakennetta $\mathcal{A}$, jonka universumi on $A = \{1\}$. Lisäksi tarvitaan vakiosymboli c ja predikaatti P siten, että

$$c^{\mathcal{A}} = 1, \quad \text{ja} \quad P^{\mathcal{A}} = \{\langle 1, 1 \rangle\}.$$

Tarkistetaan, että

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2) \wedge \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P(x_1, x_2) \wedge P(x_2, x_3) \rightarrow P(x_1, x_3))$$

pätee. Koska universumissa on ainoastaan yksi alkio ($c^{\mathcal{A}} = 1$) ja $\langle 1, 1 \rangle \in P$ (eli $\mathcal{A} \models P(c, c)$),

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2).$$

Samasta syystä

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P(x_1, x_2) \wedge P(x_2, x_3) \rightarrow P(x_1, x_3)),$$

koska

$$\mathcal{A} \models P(c, c) \wedge P(c, c) \rightarrow P(c, c).$$

2. a)

$$F\,((\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x)))^{1.}$$
$$|$$
$$T\,(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))^{2.}$$
$$F\,(\forall x(P(x) \vee Q(x)))^{3.\,x/c}$$
$$|$$
$$T\,(\forall x P(x))^{5.\,x/c}$$
$$T\,(\forall x Q(x))$$
$$|$$
$$F\,(P(c) \vee Q(c))^{4.}$$
$$|$$
$$F\,(P(c))$$
$$F\,(Q(c))$$
$$|$$
$$T\,(P(c))$$
$$\otimes$$

b)

$$F\,(\exists y(\exists x P(x) \rightarrow P(y)))^{1.\,y/c,\,4.\,y/d}$$
$$|$$
$$F\,(\exists x P(x) \rightarrow P(c))^{2.}$$
$$|$$
$$T\,(\exists x P(x))^{3.\,x/d}$$
$$F\,(P(c))$$
$$|$$
$$T\,(P(d))$$
$$|$$
$$F\,(\exists x P(x) \rightarrow P(d))^{5.}$$
$$|$$
$$T\,(\exists x P(x))$$
$$F\,(P(d))$$
$$\otimes$$

3. Olkoon $s =$ "ulkona sataa".

   a) $K_a K_b s \wedge \neg K_b K_a K_b s$

   b) $K_a(\neg K_b s \wedge \neg K_b \neg s)$.

   c) $K_b(K_a s \vee K_a \neg s)$.

   d) $\neg K_a K_b K_a s \wedge \neg K_a \neg K_b K_a s$.

4. a) $\varphi \to LK\varphi$

   b) $L\varphi \wedge L\psi \to L(\varphi \wedge \psi)$

   c) $K\varphi \to L\varphi$

   d) $LL\varphi \to L\varphi$