Tik-79.146 **Kevät 2000**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 10
Ratkaisut

1. Oletetaan, että $\mathcal{M}, s \not\Vdash \varphi$ ja että $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ on universaali. Olkoon

$$F = \{\Box\psi \mid \Box\psi \text{ on } \varphi\text{:n alikaava ja } \mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box\psi\}.$$

Silloin jokaista $\Box\psi \in F$ vastaa tila $s_\psi \in S$ siten, että

$$\mathcal{M}, s_\psi \Vdash \neg\psi.$$

Olkoon $\mathcal{M}' = \langle S', R', v\rangle$, missä

$$S' = \{s\} \cup \{s_\psi \mid \Box\psi \in F\} \subseteq S$$

ja $R' = S' \times S'$. Koska $|F| < |\mathrm{Sub}(\varphi)| \leq |\varphi|$, myös $|S'| \leq |\varphi|$. ($|\mathrm{Sub}(\varphi)|$ on φ:n alikaavojen lukumäärä).

Osoitetaan induktiolla, että jokaiselle $s' \in S'$ ja jokaiselle φ:n alikaavalle ψ pätee

$$\mathcal{M}, s' \Vdash \psi \quad \text{joss} \quad \mathcal{M}', s' \Vdash \psi.$$

Perustapaus (alikaava on propositio) on triviaali. Myös muotoa $\psi' \wedge \psi''$ ja $\neg\psi$ olevien alikaavojen induktioaskeleet seuraavat heti. Olkoon sitten alikaava muotoa $\Box\psi$. Olkoon $s' \in S'$.

Jos $\mathcal{M}, s' \Vdash \Box\psi$, niin $\mathcal{M}, t \Vdash \psi$ kaikilla $t \in S$, koska $\mathcal{M}$ on universaali. Erityisesti $\mathcal{M}, t \Vdash \psi$ kaikilla $t \in S'$. Induktio-oletuksen perusteella $\mathcal{M}', t \Vdash \psi$ kaikilla $t \in S'$, mistä seuraa, että $\mathcal{M}', s' \Vdash \Box\psi$.

Toisaalta, jos $\mathcal{M}, s' \not\Vdash \Box\psi$, niin $\mathcal{M}, t \Vdash \neg\Box\psi$ kaikilla $t \in S$, koska $\mathcal{M}$ on universaali. Erityisesti $\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box\psi$, ja siksi $\Box\psi \in F$. On siis olemassa tila $s_\psi \in S'$ siten, että $\mathcal{M}, s_\psi \Vdash \neg\psi$ ja $\mathcal{M}, s_\psi \not\Vdash \psi$, mistä saadaan induktio-oletuksen perusteella $\mathcal{M}', s_\psi \not\Vdash \psi$, joten $\mathcal{M}', s_\psi \Vdash \neg\psi$. Eli $\mathcal{M}', s' \not\Vdash \Box\psi$.

Jos φ ei ole **S5**-pätevä, on olemassa vastamalli $\mathcal{M}$ ja tila s siten, että $\mathcal{M}, s \not\Vdash \varphi$. Yllä olevan konstruktion avulla saadaan φ:lle toinen vastamalli $\mathcal{M}'$, jossa on korkeintaan $|\varphi|$ tilaa.

2. Konstruoidaan kaava φ_m siten, että φ_m pätee **S4**-mallissa vain, jos **S4**-mallissa on täydellinen binääripuu, jonka syvyys on m. Määritellään apukaavat

$$\begin{aligned}
\mathit{depth} &= \bigwedge_{i=1}^{m+1} (d_i \to d_{i-1}) \\
\mathit{determined} &= \bigwedge_{i=1}^{m} \Big(d_i \to \big(p_i \to \Box(d_i \to p_i)\big) \land \big(\neg p_i \to \Box(d_i \to \neg p_i)\big)\Big) \\
\mathit{branching} &= \bigwedge_{i=0}^{m-1} \big((d_i \land \neg d_{i+1}) \to \\
&\qquad \neg\Box\neg(d_{i+1} \land \neg d_{i+2} \land p_{i+1}) \land \neg\Box\neg(d_{i+1} \land \neg d_{i+2} \land \neg p_{i+1})\big)
\end{aligned}$$

Idea on seuraava. Kaavasta *depth* seuraa, että d_i on tosi, jos syvyys on vähintään i. Kaava *determined* kertoo, että jos p_i on tosi tai epätosi syvyydellä i, niin se on edelleen tosi tai epätosi tästä syvemmälle. Kaava *branching* takaa, että syvyydellä i olevalla tilalla on olemassa kaksi seuraajatilaa syvyydellä $i+1$ siten, että toisessa p_{i+1} on tosi ja toisessa p_{i+1} on epätosi. Tämän perusteella syvyydellä m on oltava yhtä monta tilaa, kuin on totuusjakeluja $p_1, \ldots, p_m$:n yli (2^m kpl). Määritellään nyt

$$\varphi_m = d_0 \land \neg d_1 \land \Box(\mathit{depth} \land \mathit{determined} \land \mathit{branching}).$$

Kaavan φ_m pituus on $O(m)$. Osoitetaan induktiolla, että tämän kaavan toteuttavan mallin täytyy sisältää vähintään 2^m tilaa.

Oletetaan, että $\mathcal{M}, s \Vdash \varphi_m$, $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$. Perustapaus: koska

$$\mathcal{M}, s \Vdash d_0 \land \neg d_1 \land \mathit{branching},$$

on olemassa kaksi tilaa t_1, t_2 siten, että

$$\mathcal{M}, t_1 \Vdash d_1 \land \neg d_2 \land p_1 \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, t_2 \Vdash d_1 \land \neg d_2 \land \neg p_1.$$

Induktio-oletus: jokaista totuusjakelua v $p_1, \ldots, p_j$:n yli vastaa tila t siten, että sRt, $\mathcal{M}, t \Vdash d_j \land \neg d_{j+1}$ ja kaikilla $i = 1, \ldots, j$: $v(p_i) = \mathbf{true}$ joss $\mathcal{M}, t \Vdash p_i$.

Induktioaskel: Olkoon v jokin totuusjakelu $p_1, \ldots, p_{j+1}$:n yli. Induktio-oletuksen mukaan on olemassa tila t siten, että $\mathcal{M}, t \Vdash d_j \land \neg d_{j+1}$ ja kaikilla $i = 1, \ldots, j$: $v(p_i) = \mathbf{true}$ joss $\mathcal{M}, t \Vdash p_i$. Koska induktio-oletuksen perusteella pätee myös sRt (ja koska alkuperäisen oletuksen mukaan $\mathcal{M}, s \Vdash \varphi_m$), on oltava $\mathcal{M}, t \Vdash depth \wedge determined \wedge branching$. Kaava *branching* takaa, että on olemassa kaksi tilaa t_1, t_2 siten, että sRt_1, sRt_2 ja

$$\mathcal{M}, t_1 \Vdash d_{j+1} \wedge \neg d_{j+2} \wedge p_{j+1} \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, t_2 \Vdash d_{j+1} \wedge \neg d_{j+2} \wedge \neg p_{j+1}.$$

Lisäksi kaava *depth* takaa, että

$$\mathcal{M}, t_{1,2} \Vdash d_1 \wedge \cdots \wedge d_j,$$

ja kaava *determined* takaa, että kaikilla $i = 1, \ldots, j$

$$\mathcal{M}, t_{1,2} \Vdash p_i \quad \text{joss} \quad v(p_i) = \mathbf{true}.$$

Siten malli $\mathcal{M}$ sisältää myös jokaista $p_1, \ldots, p_{j+1}$:n yli määriteltyä totuusjakelua v kohti tilan t, jolle sRt ja kaikille $i = 1, \ldots, j+1$: $v(p_i) = \mathbf{true}$ joss $\mathcal{M}, t \Vdash p_i$.

Huomataan, että täydellisen binääripuun refleksiivinen ja transitiivinen sulkeuma muodostaa kehyksen **S4**:ssä. Siten on saatu **S4**-malli, joka sisältää tilan, jossa φ_m on tosi.

Etsitty kaava on siten $\neg\varphi_m$, koska sen vastamallissa on tila, jossa φ_m on tosi, mistä seuraa, että vastamallin täytyy sisältää ainakin 2^m tilaa.

3.

Perusoperaattori

$$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AX}P \text{ joss } \mathcal{M}, t \models P \text{ kaikille } t\text{, joille } sRt$$

Korvataan P $\neg P$:llä:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}, s \models \mathbf{AX}\neg P \text{ joss } \mathcal{M}, t \models \neg P \text{ kaikille } t\text{, joille } sRt \\
&\mathcal{M}, s \not\models \mathbf{AX}\neg P \text{ joss } \mathcal{M}, t \not\models \neg P \text{ jollekin } t\text{, jolle } sRt \\
&\mathcal{M}, s \models \neg\mathbf{AX}\neg P \text{ joss } \mathcal{M}, t \not\models \neg P \text{ jollekin } t\text{, jolle } sRt \\
&\mathcal{M}, s \models \mathbf{EX}P \text{ joss } \mathcal{M}, t \models P \text{ jollekin } t\text{, jolle } sRt
\end{aligned}$$

Perusoperaattori

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$ joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s = s_0, s_1, \ldots)$ on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, s_i \models Q$ ja kaikille $j < i$: $\mathcal{M}, s_j \models P$

$P \to \top$, $Q \to P$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{A}(\top\mathbf{U}P)$ joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s = s_0, s_1, \dots)$
on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, s_i \models P$ ja kaikille $j < i$: $\mathcal{M}, s_j \models \top$
$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}P$ joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s = s_0, s_1, \dots)$
on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, s_i \models P$

Perusoperaattori

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)$ joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \dots)$
ja on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, s_i \models Q$ ja kaikille $j < i$: $\mathcal{M}, s_j \models P$

$P \to \top$, $Q \to P$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{E}(\top\mathbf{U}P)$ joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \dots)$
ja on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, s_i \models P$ ja kaikille $j < i$: $\mathcal{M}, s_j \models \top$
$\mathcal{M}, s \models \mathbf{EF}P$ joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \dots)$
ja on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, s_i \models P$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{EF}P$ joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \dots)$
ja on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, s_i \models P$
$\mathcal{M}, s \models \mathbf{EF}\neg P$ joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \dots)$
ja on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, s_i \models \neg P$
$\mathcal{M}, s \not\models \mathbf{EF}\neg P$ joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s = s_0, s_1, \dots)$
ja kaikille i, $\mathcal{M}, s_i \not\models \neg P$
$\mathcal{M}, s \models \neg\mathbf{EF}\neg P$ joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s = s_0, s_1, \dots)$
ja kaikille i: $\mathcal{M}, s_i \not\models \neg P$
$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AG}P$ joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s = s_0, s_1, \dots)$
ja kaikille i: $\mathcal{M}, s_i \models P$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}P$ joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s = s_0, s_1, \dots)$
on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, s_i \models P$
$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}\neg P$ joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s = s_0, s_1, \dots)$
on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, s_i \models \neg P$
$\mathcal{M}, s \not\models \mathbf{AF}\neg P$ joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \dots)$
ja kaikille i, $\mathcal{M}, s_i \not\models \neg P$
$\mathcal{M}, s \models \neg\mathbf{AF}\neg P$ joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \dots)$
ja kaikille i, $\mathcal{M}, s_i \models P$
$\mathcal{M}, s \models \mathbf{EG}P$ joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \dots)$
ja kaikille i, $\mathcal{M}, s_i \models P$

4.

$\mathcal{M}, x \models P\mathbf{U}Q$ joss on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, x^i \models Q$ ja kaikille $j < i$ $\mathcal{M}, x^j \models P$
$\mathcal{M}, x \models \top\mathbf{U}P$ joss on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, x^i \models P$ ja kaikille $j < i$ $\mathcal{M}, x^j \models \top$
$\mathcal{M}, x \models \mathbf{F}P$ joss on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, x^i \models P$

$\mathcal{M}, x \models \mathbf{F}P$ joss on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, x^i \models P$
$\mathcal{M}, x \models \mathbf{F}\neg P$ joss on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, x^i \models \neg P$
$\mathcal{M}, x \not\models \mathbf{F}\neg P$ joss ei ole olemassa i, jolle $\mathcal{M}, x^i \models \neg P$
$\mathcal{M}, x \models \neg\mathbf{F}\neg P$ joss kaikille i $\mathcal{M}, x^i \not\models \neg P$
$\mathcal{M}, x \models \mathbf{G}P$ joss kaikille i $\mathcal{M}, x^i \models P$

$\mathcal{M}, x \models P\mathbf{U}Q$ joss on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, x^i \models Q$ ja kaikille $j < i$ $\mathcal{M}, x^j \models P$
$\mathcal{M}, x \models (\neg P)\mathbf{U}Q$ joss on olemassa i, jolle $\mathcal{M}, x^i \models Q$ ja kaikille $j < i$ $\mathcal{M}, x^j \models \neg P$
$\mathcal{M}, x \not\models (\neg P)\mathbf{U}Q$ joss ei ole olemassa i, jolle $\mathcal{M}, x^i \models Q$ tai jokaisella i, jolle
$\mathcal{M}, x^i \models Q$ on olemassa $j < i$, jolle $\mathcal{M}, x^j \not\models \neg P$
$\mathcal{M}, x \models P\mathbf{B}Q$ joss ei ole olemassa i, jolle $\mathcal{M}, x^i \models Q$ tai jokaisella i, jolle
$\mathcal{M}, x^i \models Q$ on olemassa $j < i$, jolle $\mathcal{M}, x^j \models P$