# TAULUMENETELMÄ MODAALILOGIIKALLE

- On vaikeaa löytää Hilbert-tyylisiä todistuksia:

  Käytössä Modus Ponens -sääntö: jotta voidaan johtaa $Q$, täytyy johtaa $P$ ja $P \to Q$.

  Mutta mikä on sopiva $P$?

  Esim. $\{A \to B, A \to C\} \models A \to (B \wedge C)$

  1. $A \to B$
  2. $A \to C$
  3. $\vdots$
  4. $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$

- Alikaavaperiaate: lauseen $Q$ todistuksessa tarvitaan vain $Q$:n alikaavoja.

  $\boxed{\Rightarrow}$ resoluutio, sekventtikalkyyli, taulumenetelmä.



# Taulumenetelmä modaalilogiikalle $\mathbf{K}$

- **Prefiksi** on ei-tyhjä äärellinen jono luonnollisia lukuja.

  Esim. $\langle 1 \rangle$ ja $\langle 11, 1, 1, 1, 111, 2 \rangle$ ovat prefiksejä.

- **Prefiksoitu lause** on muotoa $\sigma P$, missä $\sigma$ on prefiksi ja $P$ lause.

  Esim. $\langle 1 \rangle (P \vee \neg P)$ ja $\langle 11, 1, 1, 111, 2 \rangle \Box\Box\Diamond P$ ovat prefiksoituja lauseita.

- $\sigma n$ on prefiksi, joka saadaan prefiksistä $\sigma$ liittämällä sen perään luku $n$.

  Esim. Jos $\sigma = \langle 1 \rangle$, $\sigma 11 = \langle 1, 11 \rangle$.

- $\mathbf{K}$-saavutettavuus: Prefiksi muotoa $\sigma n$ on $\mathbf{K}$-saavutettavissa prefiksistä $\sigma$.

  Esim. $\langle 1, 11, 11 \rangle$ on $\mathbf{K}$-saavutettavissa prefiksistä $\langle 1, 11 \rangle$.

## Taulusäännöt

$\sigma P$: $P$ tosi maailmassa $\sigma$.

- Lauselogiikan säännöt (prefiksoiduille lauseille):

$$\frac{\sigma\neg\neg P}{\sigma P} \qquad \frac{\sigma\alpha}{\sigma\alpha_1 \\ \sigma\alpha_2} \qquad \frac{\sigma\beta}{\sigma\beta_1 \mid \sigma\beta_2}$$

**Esimerkki.**

1. $\langle 3,2,1\rangle\neg((\neg P \to Q) \to P)$
2. $\langle 3,2,1\rangle(\neg P \to Q)$ (1)
3. $\langle 3,2,1\rangle\neg P$ (1)
4. $\langle 3,2,1\rangle\neg\neg P$ (2) | 5. $\langle 3,2,1\rangle Q$ (2)
6. $\langle 3,2,1\rangle P$ (4) |
   $\times$ |



**Määritelmä.** Prefiksi on haarassa
(i) **tarjolla**, jos se esiintyy haarassa,
(ii) **rajoittamaton**, jos ei ole minkään haarassa esiintyvän prefiksin alkuosa.

Esim. Prefiksi $\langle 1,1\rangle$ on prefiksien $\langle 1,1,12,3\rangle$ ja $\langle 1,1\rangle$ alkuosa.

- **Modaalisäännöt:**

  $\Box$: $$\frac{\sigma\Box P}{\sigma n P}$$
  mille tahansa tarjolla olevalle prefiksille $\sigma n$.

  $\neg\Box$: $$\frac{\sigma\neg\Box P}{\sigma n\neg P}$$
  rajoittamattomalle prefiksille $\sigma n$.

**Esimerkki.**

1. $\langle 1\rangle\neg(\Box P \to \Box\Box P)$
2. $\langle 1\rangle\Box P$ (1)
3. $\langle 1\rangle\neg\Box\Box P$ (1)
4. $\langle 1,1\rangle\neg\Box P$ (3)
5. $\langle 1,1\rangle P$ (2)
6. $\langle 1,1,1\rangle\neg P$ (4)

**Määritelmä.** Taulun haara on **suljettu**, jos se sisältää sekä $\sigma P$ että $\sigma\neg P$ jollekin lauseelle $P$ ja prefiksille $\sigma$ (tai jos se sisältää $\sigma\bot$ tai $\sigma\neg\top$).

Taulu on suljettu, jos jokainen sen haara on suljettu.

Lauseen $P$ **todistus** on taulu, jonka juurena on $\langle 1\rangle\neg P$ ja joka on suljettu.

**Esimerkki.** Lauseen $\Box(P\wedge Q)\to(\Box P\wedge\Box Q)$ taulutodistus.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\langle 1\rangle\neg(\Box(P\wedge Q)\to(\Box P\wedge\Box Q))$ | | | | |
| 2. | $\langle 1\rangle\Box(P\wedge Q)$ | (1) | | | |
| 3. | $\langle 1\rangle\neg(\Box P\wedge\Box Q)$ | (1) | | | |
| 4. | $\langle 1\rangle\neg\Box P$ | (3) | 5. | $\langle 1\rangle\neg\Box Q$ | (3) |
| 6. | $\langle 1,2\rangle\neg P$ | (4) | 9. | $\langle 1,2\rangle\neg Q$ | (5) |
| 7. | $\langle 1,2\rangle P\wedge Q$ | (2) | 10. | $\langle 1,2\rangle P\wedge Q$ | (2) |
| 8. | $\langle 1,2\rangle P$ | (7) | 11. | $\langle 1,2\rangle Q$ | (10) |
| | $\times$ | | | $\times$ | |



## Virheettömyys (soundius)

**Teoreema.** Jos taulu, jonka juuri on $\langle 1\rangle\neg P$, on suljettu, lause $P$ on $\mathbf{K}$-pätevä.

**Todistus.** (seuraavien osatulosten avulla)

- Määritellään taululle $\mathbf{K}$-toteutuvuus:
  taulu on $\mathbf{K}$-toteutuva, jos sen jokin haara "vastaa" mallia.

- Osoitetaan, että
  (i) $\mathbf{K}$-toteutuva taulu ei voi sulkeutua,
  (ii) jos $P$ ei ole $\mathbf{K}$-pätevä, taulu $\langle 1\rangle\neg P$ on $\mathbf{K}$-toteutuva,
  (iii) jokainen sääntö säilyttää $\mathbf{K}$-toteutuvuuden: jos taulu on **$\mathbf{K}$-toteutuva** ennen säännön soveltamista, se on **$\mathbf{K}$-toteutuva** myös säännön soveltamisen jälkeen.

  Tällöin jos $P$ ei ole $\mathbf{K}$-pätevä, lauseen $\langle 1\rangle\neg P$ taulu säilyy avoimena.

$\boxed{\Rightarrow}$ Jos taulu prefiksoidulle lauseelle $\langle 1\rangle\neg P$ on suljettu, lause $P$ on $\mathbf{K}$-pätevä.

**Määritelmä.** Taulu on **K-toteutuva**, jos joku sen haaroista on **K**-toteutuva.

Taulun haara on **K-toteutuva**, jos haarassa esiintyvien prefiksoitujen lauseiden joukko on **K**-toteutuva.

Joukko prefiksoituja lauseita $\Sigma$ on **K**-toteutuva, jos on olemassa malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ ja kuvaus $\mathcal{N}$ $\Sigma$:ssa esiintyvistä prefikseistä joukolle $S$ siten, että

1. Jos prefiksit $\sigma$ ja $\tau$ esiintyvät joukossa $\Sigma$ ja $\tau$ on **K**-saavutettavissa prefiksistä $\sigma$, tällöin $\mathcal{N}(\sigma)R\mathcal{N}(\tau)$.
2. Jos $\sigma P \in \Sigma$, niin $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \mid\!\!\vdash P$.

$\boxed{\Rightarrow}$ (i) **K**-toteutuva taulu ei voi sulkeutua.

(ii) Jos lause $P$ ei ole **K**-pätevä, taulu $\langle 1\rangle\neg P$ on **K**-toteutuva.

Näin on, koska lauseella $\neg P$ on malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ siten, että $\mathcal{M}, s' \mid\!\!\vdash \neg P$. Tällöin haara $\{\langle 1\rangle\neg P\}$ on **K**-toteutuva kuvauksella $\mathcal{N}(\langle 1\rangle) = s'$.



(iii) Olkoon taulu $\Gamma$ **K-toteutuva**.
Taulussa $\Gamma$ on haara, jonka lauseet $\Sigma$ ovat **K**-toteutuvia mallilla $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ ja kuvauksella $\mathcal{N}$.

Osoitetaan, että kun sovelletetaan mitä tahansa taulusääntöä, näin saatava taulu $\Gamma'$ on myös **K**-toteutuva.

Sovelletetaan taulusääntöä **K**-toteutuvaan haaraan:

- $\dfrac{\sigma\beta}{\sigma\beta_1 \mid \sigma\beta_2}$

  Tällöin taulussa $\Gamma'$ haarat, joiden lausejoukot
  $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\sigma\beta_1\}$
  $\Sigma_2 = \Sigma \cup \{\sigma\beta_2\}$
  Koska $\sigma\beta \in \Sigma$, $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \mid\!\!\vdash \beta$,
  joten $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \mid\!\!\vdash \beta_1$ tai $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \mid\!\!\vdash \beta_2$.
  $\boxed{\Rightarrow}$ $\Gamma'$ **K-toteutuva**.

- $\dfrac{\sigma\alpha}{\sigma\alpha_1}$ Samaan tapaan.
  $\sigma\alpha_2$

- $\dfrac{\sigma\Box P}{\sigma n P}$ tarjolla olevalle prefiksille $\sigma n$.

  Tällöin taulussa $\Gamma'$ haara, jonka lausejoukko $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\sigma n P\}$.

  Koska $\sigma\Box P \in \Sigma$, $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \mid\!\!\vdash \Box P$, joten kaikille $t$, $\mathcal{N}(\sigma) R t$, $\mathcal{M}, t \mid\!\!\vdash P$.

  Koska $\sigma n$ on $\mathbf{K}$-saavutettavissa $\sigma$:sta, $\mathcal{N}(\sigma) R \mathcal{N}(\sigma n)$. Siis $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma n) \mid\!\!\vdash P$.

  $\boxed{\Rightarrow}$ $\Gamma'$ **K-toteutuva**.

- $\dfrac{\sigma\neg\Box P}{\sigma n \neg P}$ rajoittamattomalle prefiksille $\sigma n$.

  Tällöin taulussa $\Gamma'$ haara, jonka lausejoukko $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\sigma n \neg P\}$.

  Koska $\sigma\neg\Box P \in \Sigma$, $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \mid\!\!\vdash \neg\Box P$, joten on olemassa $t$, $\mathcal{N}(\sigma) R t$, $\mathcal{M}, t \mid\!\!\vdash \neg P$.

  Koska $\sigma n$ ei ole mikään $\Sigma$ prefiksin alkuosa, kuvausta $\mathcal{N}$ voidaan laajentaa: $\mathcal{N}(\sigma n) = t$. Tällöin $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma n) \mid\!\!\vdash \neg P$.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\Gamma'$ **K-toteutuva**. ■



## Täydellisyys

- Miten taata, että jokaiselle pätevälle lauseelle löytyy taulutodistus, kun taulun haarat voivat olla äärettömiä.
- Milloin sääntöjä on sovellettu riittävästi/reilusti?

$\boxed{\Rightarrow}$ Taulun rakentamiseen tarvitaan systemaattinen menetelmä, jossa kaikkia sääntöjä on käytetty riittävästi eli jokaiselle haaralle $\theta$ pätee:
(i) Jos $\sigma\beta \in \theta$, tällöin $\sigma\beta_1 \in \theta$ tai $\sigma\beta_2 \in \theta$.
(ii) Jos $\sigma\alpha \in \theta$, tällöin $\sigma\alpha_1 \in \theta$ ja $\sigma\alpha_2 \in \theta$.
(iii) Jos $\sigma\neg\Box Q \in \theta$, $\sigma n \neg Q \in \theta$, jollakin $n$.
(iv) Jos $\sigma\Box Q \in \theta$, $\sigma n Q \in \theta$ kaikilla $\sigma n$, jotka tarjolla $\theta$:ssa.

Huom! Systemaattinen menetelmä takaa täydellisyyden mutta voi sallia äärettömät taulut, jossei todistettava lause ole pätevä.
**Ratkaisumenetelmä** takaa, että taulun rakentaminen päättyy äärellisellä askelmäärällä, olipa todistettava lause pätevä tai ei.

Systemaattinen $\mathbf{K}$-taulu lauseelle $P$:

1. Taulun juureksi $\langle 1\rangle\neg P$.
2. WHILE taulu ei ole suljettu eikä kaikkia lauseita merkitty käytetyiksi DO BEGIN
2.1 Valitaan taulusta ylin käyttämätön solmu $\sigma Q$.
2.2 Jos $Q$ ei ole literaali, jokaiselle avoimelle haaralle $\theta$, joka kulkee $\sigma Q$ kautta:

- Jos $\sigma Q$ on muotoa $\sigma\alpha$, lisätään haaran $\theta$ loppuun ensin solmu $\sigma\alpha_1$ ja sitten $\sigma\alpha_2$.
- Jos $\sigma Q$ on muotoa $\sigma\beta$, lisätään $\theta$:n loppuun kaksi lapsisolmua $\sigma\beta_1$ ja $\sigma\beta_2$ (haarautuminen).
- Jos $\sigma Q$ on muotoa $\sigma\neg\Box P$, lisätään haaran $\theta$ loppuun solmu $\sigma n\neg P$ jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle $\sigma n$.
- Jos $\sigma Q$ on muotoa $\sigma\Box P$, kaikille tässä haarassa tarjolla oleville $\sigma n$ lisätään haaran $\theta$ loppuun solmu $\sigma nP$ sekä $\boxed{\text{lisäksi solmu } \sigma\Box P}$.

2.3 Merkitään $\sigma Q$ käytetyksi.
END.



**Teoreema. (Täydellisyys)** Jos $P$ on $\mathbf{K}$-pätevä, lauseen $P$ systemaattinen $\mathbf{K}$-taulu sulkeutuu.

**Todistus.** Osoitetaan, että jos lauseen $P$ systemaattisessa $\mathbf{K}$-taulussa on avoin haara, $P$ ei ole $\mathbf{K}$-pätevä.

Olkoon $\theta$ valmiin systemaattisen taulun avoin haara ja olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ seuraava malli.

1. $S$ on $\theta$:ssa esiintyvien prefiksien joukko.

2. $\sigma R\tau$ joss $\tau$ on $\mathbf{K}$-saavutettavissa $\sigma$:sta.

3. $v(\sigma, Q) = \text{true}$ joss $\sigma Q$ esiintyy $\theta$:ssa atomilauseelle $Q$.

Todistetaan induktiolla lauseen $Q$ pituuden suhteen:

jos $\sigma Q \in \theta$, niin $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash Q$.

Koska $\langle 1\rangle\neg P$ jokaisessa haarassa, $\mathcal{M}, \langle 1\rangle \mid\!\!\vdash \neg P$. Täten $P$ ei ole $\mathbf{K}$-pätevä.

(literaali) Jos $Q$ on atomilause ja $\sigma Q \in \theta$, niin $v(\sigma, Q) = \text{true}$ ja $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash Q$.

Jos $\sigma\neg Q \in \theta$, $Q$ on atomilause ja $\sigma Q \notin \theta$. Tällöin $\mathcal{M}, \sigma \not\mid\!\!\vdash Q$ ja $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash \neg Q$.

**IH**: Jos $Q$ on lyhyempi kuin $j$ ja $\sigma Q \in \theta$, $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash Q$. Olkoon lauseen $Q$ pituus $j$.

($\beta$) Jos $\sigma\beta \in \theta$, tällöin $\sigma\beta_1 \in \theta$ tai $\sigma\beta_2 \in \theta$.
[IH] $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash \beta_1$ tai $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash \beta_2$. Täten $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash \beta$.

($\alpha$) Jos $\sigma\alpha \in \theta$, tällöin $\sigma\alpha_1 \in \theta$ ja $\sigma\alpha_2 \in \theta$.
[IH] $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash \alpha_1$ ja $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash \alpha_2$. Täten $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash \alpha$.

($\neg\Box$) Jos $\sigma\neg\Box Q \in \theta$, $\sigma n\neg Q \in \theta$.
[IH] $\mathcal{M}, \sigma n \mid\!\!\vdash \neg Q$. Siis $\mathcal{M}, \sigma \not\mid\!\!\vdash \Box Q$, koska $\sigma R \sigma n$.

($\Box$) Jos $\sigma\Box Q \in \theta$, $\sigma n Q \in \theta$ kaikilla $\sigma n$, jotka tarjolla $\theta$:ssa.
[IH] $\mathcal{M}, \sigma n \mid\!\!\vdash Q$. Täten $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash \Box Q$.

Siis jokaiselle avoimelle haaralle $\theta$:
jos $\sigma Q \in \theta$, $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash Q$. ■



Ratkaisuproseduuri (lauseen $P$ $\mathbf{K}$-pätevyydelle):
1. Taulun juureksi $\langle 1 \rangle \neg P$.
2. WHILE taulu ei ole suljettu eikä kaikkia lauseita merkitty käytetyiksi DO BEGIN
2.1 Valitaan taulusta ylin käyttämätön solmu $\sigma Q$.
2.2 Jos $Q$ ei ole literaali, jokaiselle haaralle $\theta$, joka kulkee $\sigma Q$ kautta:

- Jos $\sigma Q$ on muotoa $\sigma\alpha$, lisätään haaran $\theta$ loppuun ensin solmu $\sigma\alpha_1$ ja sitten $\sigma\alpha_2$.
- Jos $\sigma Q$ on muotoa $\sigma\beta$, lisätään $\theta$:n loppuun kaksi lapsisolmua $\sigma\beta_1$ ja $\sigma\beta_2$ (haarautuminen).
- Jos $\sigma Q$ on muotoa $\sigma\neg\Box P$ lisätään haaran $\theta$ loppuun solmu $\sigma n\neg P$ jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle $\sigma n$ sekä tämän jälkeen $\sigma n X$ kullekin haarassa esiintyvälle $\sigma\Box X$.
- Jos $\sigma Q$ on muotoa $\sigma\Box P$, kaikille tässä haarassa tarjolla oleville $\sigma n$ lisätään haaran $\theta$ loppuun solmu $\sigma n P$.

2.3 Merkitään $\sigma Q$ käytetyksi.
END.

**Esimerkki.** Tutkitaan taulumenetelmällä, onko $\Box P \to \Box\Box P$ $\mathbf{K}$-pätevä.

Rakennetaan $\mathbf{K}$-taulu ratkaisuproseduurilla.

1. $\langle 1\rangle \neg(\Box P \to \Box\Box P)$
2. $\langle 1\rangle \Box P$ $(1)$
3. $\langle 1\rangle \neg\Box\Box P$ $(1)$
4. $\langle 1,2\rangle \neg\Box P$ $(3)$
5. $\langle 1,2\rangle P$ $(2/3)$
6. $\langle 1,2,3\rangle \neg P$ $(4)$

Koska taulu jää auki, voidaan avoimesta haarasta koota **vastamalli** $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä

$S = \{\langle 1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,2,3\rangle\}$
$R = \{\langle\langle 1\rangle, \langle 1,2\rangle\rangle, \langle\langle 1,2\rangle, \langle 1,2,3\rangle\rangle\}$ ja
$v(\sigma, P) = \mathrm{true}$ joss $\sigma = \langle 1,2\rangle$.

Nyt $\mathcal{M}, \langle 1\rangle \not\models \Box P \to \Box\Box P$ .



## Muut modaalilogiikat

Laajennetaan edellä esitetty taulumenetelmä käsittelemään myös muita modaalilogiikoita kuin $\mathbf{K}$.

**Määritelmä.** Prefiksi $\tau$ on prefiksin $\sigma$ **yksinkertainen jatko**, jos $\tau$ on muotoa $\sigma n$ jollekin $n$.

Taulumenetelmä modaalilogiikalle $\mathbf{L}$:

**$\neg\Box$-sääntö:**

$$\frac{\sigma \neg\Box P}{\tau \neg P} \qquad\qquad \frac{\sigma \Diamond P}{\tau P}$$

missä $\tau$ on haarassa rajoittamaton prefiksin $\sigma$ yksinkertainen jatko.

**$\Box$-sääntö:**

$$\frac{\sigma\Box P}{\tau P} \qquad \frac{\sigma\neg\Diamond P}{\tau\neg P}$$

missä $\tau$ $\mathbf{L}$-saavutettavissa prefiksistä $\sigma$ ja

1. logiikoille $\mathbf{K}, \mathbf{KB}, \mathbf{K4}$
   $\tau$ on tarjolla haarassa;
2. logiikoille $\mathbf{D}, \mathbf{T}, \mathbf{DB}, \mathbf{B}, \mathbf{D4}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$
   (i) $\tau$ on tarjolla haarassa tai
   (ii) $\tau$ on rajoittamaton prefiksin $\sigma$ yksinkertainen jatko.



**Määritelmä.** Prefiksien saavutettavuusrelaatio:

1. yleinen, jos $\sigma n$ on saavutettavissa prefiksistä $\sigma$ kaikilla $n$;
2. käänteinen, jos $\sigma$ on saavutettavissa prefiksistä $\sigma n$ kaikilla $n$;
3. refleksiivinen, jos $\sigma$ on saavutettavissa $\sigma$:sta;
4. transitiivinen, jos $\tau$ on saavutettavissa prefiksistä $\sigma$ aina, kun $\sigma$ on $\tau$:n aito alkuosa.
5. universaalinen, jos prefiksi on saavutettavissa mistä tahansa prefiksistä.

| Logiikka $\mathbf{L}$ | $\mathbf{L}$-saavutettavuus |
|---|---|
| $\mathbf{K}, \mathbf{D}$ | yleinen |
| $\mathbf{T}$ | yleinen, refleksiivinen |
| $\mathbf{KB}, \mathbf{DB}$ | yleinen, käänteinen |
| $\mathbf{B}$ | yleinen, refleksiivinen, käänteinen |
| $\mathbf{K4}, \mathbf{D4}$ | yleinen, transitiivinen |
| $\mathbf{S4}$ | yleinen, refleksiivinen, transitiivinen |
| $\mathbf{S5}$ | universaali |

## Esimerkkejä.

**D**-taulutodistus lauseelle $\Box P \to \neg\Box\neg P$.

1. $\langle 1\rangle \neg(\Box P \to \neg\Box\neg P)$
2. $\langle 1\rangle \Box P$ (1)
3. $\langle 1\rangle \neg\neg\Box\neg P$ (1)
4. $\langle 1\rangle \Box\neg P$ (3)
5. $\langle 1,2\rangle \neg P$ (4) Huom. 2.(ii)
6. $\langle 1,2\rangle P$ (2)

$\times$

**T**-taulutodistus lauseelle $\Box P \to P$.

1. $\langle 1\rangle \neg(\Box P \to P)$
2. $\langle 1\rangle \Box P$ (1)
3. $\langle 1\rangle \neg P$ (1)
4. $\langle 1\rangle P$ (2) Huom. refleksiivisyys

$\times$



**K4**-taulutodistus lauseelle $\Box P \to \Box\Box P$.

1. $\langle 1\rangle \neg(\Box P \to \Box\Box P)$
2. $\langle 1\rangle \Box P$ (1)
3. $\langle 1\rangle \neg\Box\Box P$ (1)
4. $\langle 1,2\rangle \neg\Box P$ (3)
5. $\langle 1,2,3\rangle \neg P$ (4)
6. $\langle 1,2,3\rangle P$ (2) Huom. transit.

$\times$

**KB**-taulutodistus lauseelle $P \to \Box\Diamond P$.

1. $\langle 1\rangle \neg(P \to \Box\Diamond P)$
2. $\langle 1\rangle P$ (1)
3. $\langle 1\rangle \neg\Box\Diamond P$ (1)
4. $\langle 1,2\rangle \neg\Diamond P$ (3)
5. $\langle 1\rangle \neg P$ (4) Huom. käänteisyys

$\times$

Systemaattinen $\mathbf{L}$-taulu lauseelle $P$

Kuten logiikalle $\mathbf{K}$, mutta kohta 2.2 tarkennettuna:
2.2 Jos $Q$ ei ole literaali, jokaiselle avoimelle haaralle $\theta$, joka kulkee $\sigma Q$ kautta:

- Jos $\sigma Q$ on muotoa $\sigma\neg\Box P$ ($\sigma\Diamond P$), lisätään haaran $\theta$ loppuun solmu $\sigma n\neg P$ ($\sigma nP$) jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle $\sigma n$.

- Jos $\sigma Q$ on muotoa $\sigma\Box P$ ($\sigma\neg\Diamond P$),
  **(a)** Kun $\mathbf{L}$ on $\mathbf{K}, \mathbf{KB}, \mathbf{K4}, \mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$:
  jokaiselle $\theta$:ssa tarjolla olevalle $\sigma'$, joka on $\mathbf{L}$-saavutettavissa $\sigma$:sta, lisätään $\theta$:n loppuun solmu $\sigma' P$ ($\sigma'\neg P$) ja lopuksi $\sigma\Box P$ ($\sigma\neg\Diamond P$).
  **(b)** Kun $\mathbf{L}$ on $\mathbf{D}, \mathbf{DB}, \mathbf{D4}$:
  jokaiselle $\theta$:ssa tarjolla olevalle $\sigma'$, joka on $\mathbf{L}$-saavutettavissa $\sigma$:sta, lisätään $\theta$:n loppuun solmu $\sigma' P$ ($\sigma'\neg P$). Jos tällaisia prefiksejä $\sigma'$ ei ole, lisätään $\theta$:n loppuun solmu $\sigma nP$ ($\sigma n\neg P$) jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle $\sigma n$. Kummassakin tapauksessa lisätään vielä haaran loppuun $\sigma\Box P$ ($\sigma\neg\Diamond P$).



## S5-taulut

Prefikseinä riittävät luonnolliset luvut.

**$\neg\Box$-sääntö:** $\dfrac{n\neg\Box P}{k\neg P}$ $\qquad$ $\dfrac{n\Diamond P}{kP}$

missä $k$ ei esiinny haarassa.

**$\Box$-sääntö:** $\dfrac{n\Box P}{kP}$ $\qquad$ $\dfrac{n\neg\Diamond P}{k\neg P}$

mille tahansa $k$.

**Esimerkki. S5**-taulutodistus lauseelle $\neg\Box P\rightarrow\Box\neg\Box P$.

1. $1\neg(\neg\Box P\rightarrow\Box\neg\Box P)$
2. $1\neg\Box P$ (1)
3. $1\neg\Box\neg\Box P$ (1)
4. $2\neg P$ (2)
5. $3\neg\neg\Box P$ (3)
6. $3\Box P$ (5)
7. $2P$ (6)

$\times$

Systemaattinen menetelmä (**S5**-pätevyydelle):
1. Taulun juureksi $1\neg P$.
2. WHILE taulu ei ole suljettu eikä kaikkia lauseita merkitty käytetyiksi DO BEGIN
2.1 Valitaan taulusta ylin käyttämätön solmu $nQ$.
2.2 Jos $Q$ ei ole literaali, jokaiselle avoimelle haaralle $\theta$, joka kulkee $nQ$ kautta:

- Jos $nQ$ on muotoa $n\alpha$, lisätään haaran $\theta$ loppuun ensin solmu $n\alpha_1$ ja sitten $n\alpha_2$.
- Jos $nQ$ on muotoa $n\beta$, lisätään $\theta$:n loppuun kaksi lapsisolmua $n\beta_1$ ja $n\beta_2$ (haarautuminen).
- Jos $nQ$ on muotoa $n\neg\Box P$, lisätään haaran $\theta$ loppuun solmu $k\neg P$ jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle $k$ sekä tämän jälkeen $kX$ kullekin haarassa esiintyvälle $j\Box X$.
- Jos $nQ$ on muotoa $n\Box P$, kaikille tässä haarassa tarjolla oleville $k$ lisätään haaran $\theta$ loppuun solmu $kP$.

2.3 Merkitään $nQ$ käytetyksi.
END.



## KD45-taulut

Prefikseinä riittävät luonnolliset luvut.

**$\neg\Box$-sääntö:** $\dfrac{n\neg\Box P}{k\neg P}$ $\qquad$ $\dfrac{n\Diamond P}{kP}$

missä $k$ ei esiinny haarassa.

**$\Box$-sääntö:** $\dfrac{n\Box P}{kP}$ $\qquad$ $\dfrac{n\neg\Diamond P}{k\neg P}$

mille tahansa $k \neq 1$.

**Esimerkki.** Vertaa.

$(\Box P \to P)$:
1. $1\neg(\Box P \to P)$
2. $1\Box P$ (1)
3. $1\neg P$ (1)

$\Box(\Box P \to P)$:
1. $1\neg\Box(\Box P \to P)$
2. $2\neg(\Box P \to P)$ (1)
3. $2\Box P$ (2)
4. $2\neg P$ (2)
5. $2P$ (3)

$\times$

## Looginen seuraavuus taulumenetelmällä

Tehtävä: $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$

Tarvitaan kaksi uutta sääntöä premissejä varten.

**Globaali sääntö:** solmulla $\sigma Q$ voidaan jatkaa mitä tahansa haaraa mille tahansa haarassa tarjolla olevalla prefiksillä $\sigma$ ja mille tahansa $Q \in \Sigma$.

**Lokaali sääntö:** solmulla $\langle 1 \rangle Q$ voidaan jatkaa mitä tahansa haaraa mille tahansa $Q \in \Upsilon$.

**Esimerkki.** $\{P\} \models_{\mathbf{K}} \{\Box P \to Q\} \Longrightarrow Q$:

1. $\langle 1 \rangle \neg Q$
2. $\langle 1 \rangle \Box P \to Q$ (LP)
3. $\langle 1 \rangle \neg \Box P$ (2)
5. $\langle 1, 2 \rangle \neg P$ (2)
6. $\langle 1, 2 \rangle P$ (GP)
   $\times$

4. $\langle 1 \rangle Q$ (2)
   $\times$