# MODAALILOGIIKKOJEN TODISTUSTEORIA

Todistusteoria: (syntaktinen) kalkyyli, jolla todetaan, onko annettu lause pätevä/seuraako lause loogisesti lausejoukosta.

$\boxed{\Rightarrow}$ Automatisointi

- Aksiomaattinen (Hilbert-tyyppinen) todistusteoria
- Luonnollisen päättelyn menetelmät
- Taulumenetelmät
- Resoluutio



## Hilbert-tyylinen todistusteoria

Modaalilogiikalle $\mathbf{K}$:

**Klassiset aksioomat:** Kaikki tautologiat.

**Modaaliaksioomat:** Kaikki muotoa

$$\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$$

olevat lauseet.

**Modus Ponens -sääntö:**

$$\frac{P, P \to Q}{Q}$$

**Välttämättömyyssääntö (N-sääntö):**

$$\frac{P}{\Box P}$$

(Käsitellään ensin tapausta, jossa ei ole käytössä lokaaleja premissejä.)

**Määritelmä.**
Lauseen $P$ **$\mathbf{K}$-johto** lausejoukosta $\Sigma$ on äärellinen jono lauseita

$\phi_1, \ldots, \phi_n$

siten, että $\phi_n = P$ ja kaikille $i = 1, \ldots, n$

1. $\phi_i \in \Sigma$ tai
2. $\phi_i$ on joku $\mathbf{K}$:n aksioomeista tai
3. $\phi_i$ saadaan Modus Ponens -säännöllä tai N-säännöllä jonon aiemmista lauseista.

Merkintätapa: $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ (tai $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} P$ )

Lauseen $P$ **$\mathbf{K}$-todistus** on lauseen $P$ $\mathbf{K}$-johto tyhjästä lausejoukosta.

Merkintätapa: $\emptyset \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ (tai $\vdash_{\mathbf{K}} P$)



Esim. $\top \leftrightarrow \Box\top$ on $\mathbf{K}$-todistuva.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\top \rightarrow (\Box\top \rightarrow (\top \rightarrow \Box\top))$ | (Taut) |
| 2. | $\top$ | (Taut) |
| 3. | $\Box\top \rightarrow (\top \rightarrow \Box\top)$ | (MP, 1, 2) |
| 4. | $\Box\top$ | (N, 2) |
| 5. | $\top \rightarrow \Box\top$ | (MP, 3, 4) |
| 6. | $\Box\top \rightarrow (\top \rightarrow (\Box\top \rightarrow \top))$ | (Taut) |
| 7. | $\top \rightarrow (\Box\top \rightarrow \top)$ | (MP, 4, 6) |
| 8. | $\Box\top \rightarrow \top$ | (MP, 2, 7) |
| 9. | $(\Box\top \rightarrow \top) \rightarrow ((\top \rightarrow \Box\top) \rightarrow ((\Box\top \rightarrow \top) \wedge (\top \rightarrow \Box\top)))$ | (Taut) |
| 10. | $(\top \rightarrow \Box\top) \rightarrow ((\Box\top \rightarrow \top) \wedge (\top \rightarrow \Box\top))$ | (MP, 8, 9) |
| 11. | $(\Box\top \rightarrow \top) \wedge (\top \rightarrow \Box\top)$ | (MP, 5, 10) |
| 12. | $(\Box\top \rightarrow \top) \wedge (\top \rightarrow \Box\top) \rightarrow (\top \leftrightarrow \Box\top)$ | (Taut) |
| 13. | $\top \leftrightarrow \Box\top$ | (MP, 11, 12) |

Johdettuja sääntöjä:

## R-sääntö

$$\frac{P \to Q}{\Box P \to \Box Q}$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $P \to Q$ | (GP) |
| 2. | $\Box(P \to Q)$ | (N, 1) |
| 3. | $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$ | ($K$) |
| 4. | $\Box P \to \Box Q$ | (MP, 2, 3) |

## Yleistetty R-sääntö

$$\frac{P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \to Q}{\Box P_1 \wedge \cdots \wedge \Box P_n \to \Box Q}$$



## R$\Diamond$-sääntö

$$\frac{P \to Q}{\Diamond P \to \Diamond Q}$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $P \to Q$ | (GP) |
| 2. | $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ | (Taut) |
| 3. | $\neg Q \to \neg P$ | (MP, 1, 2) |
| 4. | $\Box\neg Q \to \Box\neg P$ | (R, 3) |
| 5. | $(\Box\neg Q \to \Box\neg P) \to$ $(\neg\Box\neg P \to \neg\Box\neg Q)$ | (Taut) |
| 6. | $\neg\Box\neg P \to \neg\Box\neg Q$ | (MP, 4, 5) |

## Virheettömyys ja täydellisyys

**Teoreema.** $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ joss lauseelle $P$ on olemassa $\mathbf{K}$-johto lausejoukosta $\Sigma$ (missä $\mathbf{K}$ on kaikkien kehysten joukko).

**Todistus.** ($\Leftarrow$) **Virheettömyys**:
Jos lauseelle $P$ on $\mathbf{K}$-johto $\phi_1, \ldots, \phi_n (= P)$ lausejoukosta $\Sigma$, niin $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$.

Osoitetaan induktiolla kaikille $i = 1, \ldots, n$, $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_i$.

($i = 1$) $\phi_1 \in \Sigma$, on klassinen tautologia tai muotoa $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$.
Tällöin $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_1$.
[Mahd. maailmojen semantiikan perusteoreema]

($i > 1$) $\phi_i \in \Sigma$, on klassinen tautologia, muotoa $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$ tai on saatu jonon aiemmista lauseista MP- tai N-säännöllä.
Tällöin $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_i$.
[Mahd. maailmojen semantiikan perusteoreema]



($\Rightarrow$) **Täydellisyys**:
Jos $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$, lauseelle $P$ on olemassa $\mathbf{K}$-johto lausejoukosta $\Sigma$ ($\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$).

Oletetaan, että lauseelle $P$ ei ole olemassa $\mathbf{K}$-johtoa lausejoukosta $\Sigma$.

Osoitetaan, että $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ ei päde.

Tämä tehdään muodostamalla
**kanoninen malli** $\mathcal{M}$:
kaikilla $P$, joille $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ ei päde, on olemassa mallin maailma $s$, jossa $\mathcal{M}, s \not\Vdash P$.

Mallin maailmat **maksimaalisesti konsistentteja** lausejoukkoja, jotka konstruoidaan **Lindenbaumin lemman** avulla premissijoukosta $\Sigma$.

Äärellistä joukkoa $\mathbf{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ sanotaan **$\Sigma$-epäkonsistentiksi**, jos
$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$.

(Huom! Tyhjä joukko on $\Sigma$-epäkonsistentti, jos
$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg\top$.)

Joukkoa $\mathbf{A}$ sanotaan **$\Sigma$-konsistentiksi**, jos mikään sen äärellinen alijoukko ei ole $\Sigma$-epäkonsistentti.

Koska oletimme, että lauseelle $P$ ei ole olemassa $\mathbf{K}$-johtoa lausejoukosta $\Sigma$, $\{\neg P\}$ on $\Sigma$-konsistentti. ($\emptyset$ on myös $\Sigma$-konsistentti, koska $\neg\top \to P$ on $\mathbf{K}$-todistuva/tautologia.)

1. Jos joukko $S$ on $\Sigma$-konsistentti, niin on myös jokainen sen alijoukko.

   Jos jokin alijoukko ei olisi $\Sigma$-konsistentti, olisi olemassa sen $\Sigma$-epäkonsistentti alijoukko $A$, mutta $A \subseteq S$, joten $S$ ei olisi $\Sigma$-konsistentti, ristiriita.



2. Jos joukko $\mathbf{A}$ on $\Sigma$-konsistentti ja $\neg\Box Z \in \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{\#} \cup \{\neg Z\}$ on myös $\Sigma$-konsistentti, missä $\mathbf{A}^{\#} = \{Q \mid \Box Q \in \mathbf{A}\}$.

   Oletetaan, että $\mathbf{A}^{\#} \cup \{\neg Z\}$ on $\Sigma$-epäkonsistentti.

   Tällöin on olemassa $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \mathbf{A}^{\#}$ ja $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg Z)$.

   Jatketaan johtoa:

1. $\neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg Z)$
2. $\neg\top \vee \neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_n \vee Z$ (Prop, 1)
3. $(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \to Z$ (Prop, 2)
4. $(\Box\top \wedge \Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n) \to \Box Z$ (GR, 3)
5. $\Box\top \to ((\Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n) \to \Box Z)$ (Prop, 4)
6. $\top \to \Box\top$ (Ks. s. 4)
7. $\top \to ((\Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n) \to \Box Z)$ (Prop, 5, 6)
8. $(\top \wedge \Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n) \to \Box Z$ (Prop, 7)
9. $\neg(\top \wedge \Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n \wedge \neg\Box Z)$ (Prop, 8)

$\boxed{\Rightarrow}$ $\mathbf{A}$ on $\Sigma$-epäkonsistentti.

3. **Lindenbaumin Lemma:** Jokainen $\Sigma$-konsistentti joukko voidaan laajentaa maksimaalisesti $\Sigma$-konsistentiksi joukoksi.

   ($\mathbf{A}$ on maksimaalisesti $\Sigma$-konsistentti, jos kaikilla $\mathbf{A}' \supset \mathbf{A}$ $\mathbf{A}'$ on $\Sigma$-epäkonsistentti.)

   Olkoon $\mathbf{A}$ $\Sigma$-konsistentti.

   Järjestetään kaikki modaalilauseet jonoon $Q_0, Q_1, \ldots$ ja määritellään:

   $\Delta_0 = \mathbf{A}$.

   $$\Delta_i = \begin{cases} \Delta_{i-1} \cup \{Q_{i-1}\} & \text{jos } \Delta_{i-1} \cup \{Q_{i-1}\} \\ & \quad \Sigma\text{-konsistentti} \\ \Delta_{i-1} \cup \{\neg Q_{i-1}\} & \text{muutoin} \end{cases}$$

   $$\Delta = \bigcup_{i \geq 0} \Delta_i$$

   Tällöin

   (i) $\mathbf{A} \subseteq \Delta$



   (ii) Kaikille $i = 0, 1, \ldots$ $\Delta_i$ on $\Sigma$-konsistentti.

   $\Delta_0$ on $\Sigma$-konsistentti.

   Olkoon $\Delta_{i-1}$ on $\Sigma$-konsistentti.

   Oletetaan, että $\Delta_i$ on $\Sigma$-epäkonsistentti.

   Tällöin $\Delta_i = \Delta_{i-1} \cup \{\neg Q_{i-1}\}$ ja

   $\Delta_{i-1} \cup \{Q_{i-1}\}$ on $\Sigma$-epäkonsistentti.

   Siis on olemassa $\{A_1^+, \ldots, A_{n^+}^+\} \subseteq \Delta_{i-1}$, jolle

   $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge Q_{i-1})$

   sekä $\{A_1^-, \ldots, A_{n^-}^-\} \subseteq \Delta_{i-1}$, jolle

   $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^- \wedge \neg Q_{i-1})$

1. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge Q_{i-1})$
2. $\neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^- \wedge \neg Q_{i-1})$
3. $Q_{i-1} \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+)$ (Prop, 1)
4. $\neg Q_{i-1} \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^-)$ (Prop, 2)
5. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+) \vee$
   $\neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^-)$ (Prop, 3, 4)
6. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge$
   $A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^-)$ (Prop, 5)

$\boxed{\Rightarrow}$ $\Delta_{i-1}$ on $\Sigma$-epäkonsistentti, ristiriita.

(iii) $\Delta$ on $\Sigma$-konsistentti.

Oletetaan, että $\Delta$ on $\Sigma$-epäkonsistentti.

Siis on olemassa $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \Delta$, jolle $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$.

On olemassa $i \geq 0$, jolle $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \Delta_i$.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\Delta_i$ on $\Sigma$-epäkonsistentti, ristiriita.

(iv) $\Delta$ on maksimaalisesti $\Sigma$-konsistentti.

Olkoon $\Delta \cup \{Z\}$ $\Sigma$-konsistentti.

Koska $Z = Q_i$ jollakin $i$, $\Delta \cup \{Q_i\}$ on $\Sigma$-konsistentti.

Koska $\Delta_i \cup \{Q_i\} \subseteq \Delta \cup \{Q_i\}$, $\Delta_i \cup \{Q_i\}$ on $\Sigma$-konsistentti. [1.]

Siis $Z \in \Delta_{i+1} \subseteq \Delta$

$\boxed{\Rightarrow}$ $\Delta$ on maksimaalisesti $\Sigma$-konsistentti joukko.



4. Kaikille maksimaalisesti $\Sigma$-konsistenteille joukoille $\Gamma$, (i) $\Sigma \subseteq \Gamma$ ja (ii) joko $Z \in \Gamma$ tai $\neg Z \in \Gamma$ kaikille lauseille $Z$.

   (i) Oletetaan $Z \in \Sigma - \Gamma$.

   $\Gamma \cup \{Z\}$ on $\Sigma$-epäkonsistentti.

   On olemassa $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \Gamma$, jolle $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge Z)$.

   Jatketaan todistusta:

   1. $\neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge Z)$
   2. $Z \rightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ (Prop, 1)
   3. $Z$ (GP)
   4. $\neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ (MP, 2, 3)

   Siis $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$.

   $\boxed{\Rightarrow}$ $\Gamma$ on $\Sigma$-epäkonsistentti, ristiriita ja $\Sigma \subseteq \Gamma$.

(ii) Oletetaan $Z \notin \Gamma$ ja $\neg Z \notin \Gamma$.

Siis on olemassa
$\{A_1^+, \ldots, A_{n^+}^+\} \subseteq \Gamma$, jolle
$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge Z)$
sekä $\{A_1^-, \ldots, A_{n^-}^-\} \subseteq \Gamma$, jolle
$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^- \wedge \neg Z)$.

Jatketaan johtoja:

1. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge Z)$
2. $\neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^- \wedge \neg Z)$
3. $Z \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+)$ (Prop, 1)
4. $\neg Z \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^-)$(Prop, 2)
5. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge$
   $A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^-)$ (Prop, 3, 4)

$\boxed{\Rightarrow}$ $\Gamma$ on $\Sigma$-epäkonsistentti, ristiriita ja joko $Z \in \Gamma$ tai $\neg Z \in \Gamma$ kaikille lauseille $Z$.



5. Konstruoidaan malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$.

   Olkoon $S$ kaikkien maksimaalisesti $\Sigma$-konsistenttien joukkojen luokka.

   Kaikille $s, t \in S$ olkoon $sRt$ joss $s^{\#} \subseteq t$.

   Kaikille atomilauseille $Q$ olkoon $v(s, Q) = \mathrm{true}$ joss $Q \in s$.

6. Kaikille $s \in S$ ja kaikille lauseille $Q$

   $$\mathcal{M}, s \Vdash Q \text{ joss } Q \in s$$

   (Todistus rakenteellisella induktiolla)

   - $\bot$:
     $\mathcal{M}, s \nVdash \bot$.
     Oletetaan, että $\bot \in s$. Koska $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge \bot)$, $s$ on $\Sigma$-epäkonsistentti, ristiriita ja $\bot \notin s$.
   - $\neg Q$:
     $\mathcal{M}, s \Vdash \neg Q$ joss $\mathcal{M}, s \nVdash Q$ joss [IH] $Q \notin s$ joss [4.(ii)] $\neg Q \in s$.
     ...

- $\Box Q$: ($\Leftarrow$) Olkoon $\Box Q \in s$.
  Olkoon $sRt$. Tällöin $s^{\#} \subseteq t$, $Q \in t$ ja $\mathcal{M}, t \mid\!\vdash Q$ [IH]. Siis $\mathcal{M}, s \mid\!\vdash \Box Q$.
  ($\Rightarrow$) Olkoon $\Box Q \notin s$.
  Joten $\neg\Box Q \in s$ [4.(ii)]. Nyt $t_0 = s^{\#} \cup \{\neg Q\}$ on $\Sigma$-konsistentti [2.]
  [Lindenbaum] $t_0$:lla maks. $\Sigma$-konsistentti laajennus $t$. Nyt $sRt$, koska $s^{\#} \subseteq t$.
  Koska $\neg Q \in t_0 \subseteq t$, $Q \notin t$ [4.(ii)]. Siis $\mathcal{M}, t \not\mid\!\vdash Q$ [IH] ja $\mathcal{M}, s \not\mid\!\vdash \Box Q$.

7. Jos $\Sigma$ on pätevä mallissa $\mathcal{M}$ ja on olemassa $t \in S$ siten, että $\mathcal{M}, t \not\mid\!\vdash P$, väittämä $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ ei päde.

   Koska $\Sigma \subseteq s$ kaikille $s \in S$ [4.(i)], $\Sigma$ on pätevä mallissa $\mathcal{M}$ [6.].

   Koska $\{\neg P\}$ on $\Sigma$-konsistentti, on olemassa sen maksimaalisesti $\Sigma$-konsistentti laajennus $t \in S$ ja $P \notin t$. Siis $\mathcal{M}, t \not\mid\!\vdash P$ [6.].

■



**Yleinen tapaus** (lokaalit premissit mukana)

**Määritelmä.** $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ tarkoittaa, että on olemassa lauseeseen $P$ päättyvä lausejono, joka koostuu ensin tulevasta **globaalista osasta** ja sitä seuraavasta **lokaalista osasta**.
Globaalissa osassa jokainen lause on $\mathbf{K}$:n aksiooma, kuuluu lausejoukkoon $\Sigma$ tai on saatu jonossa edellä olevista lauseista Modus Ponens tai N-säännöllä.
Lokaalissa osassa jokainen lause on $\mathbf{K}$:n aksiooma, kuuluu lausejoukkoon $\Upsilon$ tai on saatu jonossa edellä olevista lauseista Modus Ponens -säännöllä.

Esim. $\{P, P \to Q\} \vdash_{\mathbf{K}} \{\Box Q \to R\} \Longrightarrow R$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $P$ | (GP) |
| 2. | $P \to Q$ | (GP) |
| 3. | $Q$ | (MP, 1, 2) |
| 4. | $\Box Q$ | (N, 3) |
| 5. | $\Box Q \to R$ | (LP) |
| 6. | $R$ | (MP, 4, 5) |

Huom! $\{P, P \to Q\} \vdash_{\mathbf{K}} \{\Box Q \to R\} \Longrightarrow \Box R$ ei päde.

Johdot ovat äärellisiä.

$\boxed{\Rightarrow}$ **Kompaktius** ($\vdash$):

Jos $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$, niin on olemassa äärellisen joukot $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon' \subseteq \Upsilon$, joille $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon' \Longrightarrow P$.

MP- ja N-sääntö monotonisia.

$\boxed{\Rightarrow}$ **Monotonisuus** ($\vdash$):

Jos $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ ja $\Upsilon_1 \subseteq \Upsilon_2$, niin
$\Sigma_2 \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon_2 \Longrightarrow P$, jos $\Sigma_1 \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon_1 \Longrightarrow P$.

$\boxed{\Rightarrow}$ **Lokaali deduktioteoreema** ($\vdash$):

$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \cup \{Q\} \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow Q \to P$.



**Teoreema.**[Virheettömyys ja täydellisyys]
$\Sigma \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

**Todistus.** ($\Rightarrow$) Olkoon $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

- Kompaktius ($\models$):

  On olemassa äärelliset joukot $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon' = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subseteq \Upsilon$ siten, että
  $\Sigma' \models_{\mathbf{K}} \Upsilon' \Longrightarrow P$.

- Lokaali deduktioteoreema ($\models$):

  $\Sigma' \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n \to P$.

- Täydellisyysteoreema:

  $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n \to P$.

- Lokaali deduktioteoreema ($\vdash$):

  $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon' \Longrightarrow P$.

- Monotonisuus ($\vdash$):

  $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

($\Leftarrow$) Olkoon $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

- Kompaktius ($\vdash$):

  On olemassa äärelliset joukot $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon' = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subseteq \Upsilon$ siten, että
  $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon' \Longrightarrow P$.

- Lokaali deduktioteoreema ($\vdash$):

  $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n \to P$.

- Täydellisyysteoreema:

  $\Sigma' \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n \to P$.

- Lokaali deduktioteoreema ($\models$):

  $\Sigma' \models_{\mathbf{K}} \Upsilon' \Longrightarrow P$.

- Monotonisuus ($\models$):

  $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

■



## Modaalilogiikka $\mathbf{T}$

$\mathbf{T}$ on refleksiivisten kehysten joukko.

Modaalilogiikan $\mathbf{T}$ karakteristinen lause

$T$: $\Box P \to P$

**Propositio.**
$\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![T]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

$\boxed{\Rightarrow}$

**Propositio.**
$\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![T]\!] \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Hilbert-tyylinen todistusteoria modaalilogiikalle $\mathbf{T}$:

**Klassiset aksioomat:** Kaikki tautologiat.

**Modaaliaksioomat:** Kaikki muotoa

$K$: $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

$T$: $\Box P \to P$

olevat lauseet.

**Modus Ponens -sääntö**

**N-sääntö**

$$\boxed{\Rightarrow}$$

**Propositio.**
$\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \vdash_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$.



## Modaalilogiikka S5

**S5** on ekvivalenttisten kehysten joukko.

**Propositio.** $\Sigma \models_{\mathbf{S5}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![T]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![B]\!] \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![T]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![5]\!] \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![T]\!] \cup [\![5]\!] \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Hilbert-tyylinen todistusteoria modaalilogiikalle $\mathbf{S5}$:

**Modaaliaksioomat:** Kaikki muotoa

$K$: $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

$T$: $\Box P \to P$

$4$ : $\Box P \to \Box\Box P$

$5$ : $\neg\Box P \to \Box\neg\Box P$

olevat lauseet.

**Propositio.** $\Sigma \models_{\mathbf{S5}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \vdash_{\mathbf{S5}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

## Modaalilogiikka KD45

**KD45** on sarjallisien, transitiivisten ja euklidisten kehysten joukko.

**Propositio.** $\Sigma \models_{\mathbf{KD45}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![D]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![5]\!] \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Hilbert-tyylinen todistusteoria modaalilogiikalle **KD45**:

**Modaaliaksioomat:** Kaikki muotoa

$K$: $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

$D$ : $\Box P \to \Diamond P$

$4$ : $\Box P \to \Box\Box P$

$5$ : $\neg\Box P \to \Box\neg\Box P$

olevat lauseet.

**Propositio.** $\Sigma \models_{\mathbf{KD45}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \vdash_{\mathbf{KD45}} \Upsilon \Longrightarrow P$.