Tik-79.146 **Kevät 1999**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 9
Ratkaisut

1. Oletetaan että $M, s \nVdash \varphi$ ja että $M = \langle S, R, v\rangle$ on universaali. Olkoon

$$F = \{\Box\psi \mid \Box\psi \text{ on } \varphi\text{:n alikaava ja } M, s \Vdash \neg\Box\psi\}.$$

Silloin jokaiselle $\Box\psi \in F$ vastaa tila s_ψ siten että

$$M, s_\psi \Vdash \neg\psi$$

Olkoon $M' = \langle S', R', v\rangle$, missä

$$S' = \{s\} \cup \{s_\psi \mid \Box\psi \in F\}$$

ja $R' = S' \times S'$. Koska $|F| < |\mathrm{Sub}(\varphi)| \leq |\varphi|$, myös $|S'| \leq |\varphi|$.

Näytetään induktiolla että jokaisella $s' \in S'$ ja jokaisella φ:n alikaavalla ψ pätee

$$M, s' \Vdash \psi \quad \text{joss} \quad M', s' \Vdash \psi.$$

Perustapaus, alikaava on propositio, on triviaali. Myös alikaavojen muotoa $\psi' \wedge \psi''$ ja $\neg\psi$ induktioaskeleet seuraavat heti. Olkoon sitten alikaava muotoa $\Box\psi$. Otetaan $s' \in S'$.

Jos $M, s' \Vdash \Box\psi$ niin $M, t \Vdash \psi$ kaikilla $t \in S$. Erityisesti, $M, t \Vdash \psi$ kaikilla $t \in S'$. Induktiohypoteesi antaa nyt $M', t \Vdash \psi$ kaikilla $t \in S'$, josta seuraa $M', s' \Vdash \Box\psi$.

Toisaalta, jos $M, s' \nVdash \Box\psi$ niin $M, t \Vdash \neg\Box\psi$ kaikilla $t \in S$ koska M on universaali. Etenkin, $M, s \Vdash \neg\Box\psi$ ja siksi $\Box\psi \in F$. Täten $M, s_\psi \Vdash \neg\psi$ ja $M, s_\psi \nVdash \psi$ josta saadaan induktiohypoteesilla $M', s_\psi \nVdash \psi$, joten $M', s_\psi \Vdash \neg\psi$. Eli $M', s' \nVdash \Box\psi$.

Jos φ ei ole **S5**-pätevä löytyy vastamalli M ja tila s siten että $M, s \nVdash \varphi$. Yllä olevasta saadaan sitten toisen vastamallin M' jossa on korkeintaan $|\varphi|$ tilaa.

2. Konstruoidaan kaava φ_m siten että φ_m pätee **S4**-mallissa vain jos **S4**-mallissa on täydellinen binääri puu jonka syvyys on m. Määritellään

apukaavat

$$\begin{aligned}
depth &= \bigwedge_{i=1}^{m+1} (d_i \to d_{i-1}) \\
determined &= \bigwedge_{i=1}^{m} \Big(d_i \to \big(p_i \to \Box(d_i \to p_i)\big) \wedge \big(\neg p_i \to \Box(d_i \to \neg p_i)\big)\Big) \\
branching &= \bigwedge_{i=0}^{m-1} \big((d_i \wedge \neg d_{i+1}) \to \\
&\qquad \neg\Box\neg(d_{i+1} \wedge \neg d_{i+2} \wedge p_{i+1}) \wedge \neg\Box\neg(d_{i+1} \wedge \neg d_{i+2} \wedge \neg p_{i+1})\big)
\end{aligned}$$

Idea on seuraava. Kaava *depth* implikoi että d_i on totta jos syvyys on vähintään i. Kaava *determined* sanoo että jos p_i on tosi tai epätosi syvyydellä i niin se on edelleen tosi tai epätosi tästä syvemmälle. Kaava *branching* takaa että jos ollaan syvyydellä i niin löytyy kaksi tilaa syvyydellä $i+1$ siten että toisessa p_{i+1} on tosi ja toisessa p_{i+1} on epätosi. Tästä sitten seuraa että syvyydellä m löytyy yhtä monta tilaa kun on totuusjakeluja $p_1, \ldots, p_m$:n yli, eli 2^m. Nyt

$$\varphi_m = d_0 \wedge \neg d_1 \wedge \Box(depth \wedge determined \wedge branching).$$

Kaavan φ pituus on luokkaa $O(m)$.

Induktiotodistus. Oletetaan että $M, s \Vdash \varphi_m$, $M = \langle S, R, v\rangle$. Perustapaus: koska

$$M, s \Vdash d_0 \wedge \neg d_1 \wedge branching,$$

löytyy kaksi tilaa t_1, t_2 siten että

$$M, t_1 \Vdash d_1 \wedge \neg d_2 \wedge p_1 \quad \text{ja} \quad M, t_2 \Vdash d_1 \wedge \neg d_2 \wedge \neg p_1.$$

Induktiohypoteesi: jokaiselle totuusjakelulle v:lle $p_1, \ldots, p_j$:n yli löytyy tila t siten että sRt, $M, t \Vdash d_j \wedge \neg d_{j+1}$ ja kaikilla $i = 1, \ldots, j$ $v(p_i) =$ **true** joss $M, t \Vdash p_i$.

Induktioaskel: oletetan että v on totuusjakelu $p_1, \ldots, p_{j+1}$:n yli. Induktiohypoteesin mukaan löytyy tila t siten että $M, t \Vdash d_j \wedge \neg d_{j+1}$ ja kaikilla $i = 1, \ldots, j$, $v(p_i) =$ **true** joss $M, t \Vdash p_i$. Koska sRt meillä on myös $M, t \Vdash depth \wedge determined \wedge branching$. Kaava *branching* takaa että löytyy kaksi tilaa t_1, t_2 siten että

$$M, t_1 \Vdash d_{j+1} \wedge \neg d_{j+2} \wedge p_{j+1} \quad \text{ja} \quad M, t_2 \Vdash d_{j+1} \wedge \neg d_{j+2} \wedge \neg p_{j+1},$$

kaava *depth* takaa että

$$M, t_{1,2} \Vdash d_1 \wedge \cdots \wedge d_j$$

ja kaava *determined* takaa että kaikilla $i = 1, \ldots, j$

$$M, t_{1,2} \Vdash p_i \quad \text{joss} \quad v(p_i) = \mathbf{true}.$$

Huomataan että täydellisen binäärisen puun refleksiivinen ja transitiivinen sulkeuma muodostaa kehys **S4**:ssä. Täten, löytyy **S4**-malli ja tila missä φ_m on tosi.

Etsimämme kaava on sitten $\neg\varphi_m$ koska sen vastamallissa on tila missä φ_m on totta ja siksi malli sisältää ainakin 2^m tilaa.

3.

Perusoperaattori

$$M, s \models \mathbf{AX}P \text{ joss } M, t \models P \text{ kaikille } t\text{, joille } sRt$$

Korvataan P $\neg P$:llä

$$M, s \models \mathbf{AX}\neg P \text{ joss } M, t \models \neg P \text{ kaikille } t\text{, joille } sRt$$
$$M, s \not\models \mathbf{AX}\neg P \text{ joss } M, t \not\models \neg P \text{ jollekin } t\text{, jolle } sRt$$
$$M, s \models \neg\mathbf{AX}\neg P \text{ joss } M, t \not\models \neg P \text{ jollekin } t\text{, jolle } sRt$$
$$M, s \models \mathbf{EX}P \text{ joss } M, t \models P \text{ jollekin } t\text{, jolle } sRt$$

Perusoperaattori

$M, s \models \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$ joss mallissa M kaikille täysille poluille $(s = s_0, s_1, \ldots)$ on olemassa i, jolle $M, s_i \models Q$ ja kaikille $j < i$, $M, s_j \models P$

$P \to \top$, $Q \to P$

$M, s \models \mathbf{A}(\top\mathbf{U}P)$ joss mallissa M kaikille täysille poluille $(s = s_0, s_1, \ldots)$ on olemassa i, jolle $M, s_i \models P$ ja kaikille $j < i$, $M, s_j \models \top$

$M, s \models \mathbf{AF}P$ joss mallissa M kaikille täysille poluille $(s = s_0, s_1, \ldots)$ on olemassa i, jolle $M, s_i \models P$

Perusoperaattori

$M, s \models \mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)$ joss mallissa M on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \ldots)$
ja on olemassa i, jolle $M, s_i \models Q$ ja kaikille $j < i$, $M, s_j \models P$

$P \to \top$, $Q \to P$

$M, s \models \mathbf{E}(\top\mathbf{U}P)$ joss mallissa M on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \ldots)$
ja on olemassa i, jolle $M, s_i \models P$ ja kaikille $j < i$, $M, s_j \models \top$

$M, s \models \mathbf{EF}P$ joss mallissa M on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \ldots)$
ja on olemassa i, jolle $M, s_i \models P$

$M, s \models \mathbf{EF}P$ joss mallissa M on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \ldots)$
ja on olemassa i, jolle $M, s_i \models P$

$M, s \models \mathbf{EF}\neg P$ joss mallissa M on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \ldots)$
ja on olemassa i, jolle $M, s_i \models \neg P$

$M, s \not\models \mathbf{EF}\neg P$ joss mallissa M kaikille täysille poluille $(s = s_0, s_1, \ldots)$
ja kaikille i, $M, s_i \not\models \neg P$

$M, s \models \neg\mathbf{EF}\neg P$ joss mallissa M kaikille täysille poluille $(s = s_0, s_1, \ldots)$
ja kaikille i, $M, s_i \not\models \neg P$

$M, s \models \mathbf{AG}P$ joss mallissa M kaikille täysille poluille $(s = s_0, s_1, \ldots)$
ja kaikille i, $M, s_i \models P$

$M, s \models \mathbf{AF}P$ joss mallissa M kaikille täysille poluille $(s = s_0, s_1, \ldots)$
on olemassa i, jolle $M, s_i \models P$

$M, s \models \mathbf{AF}\neg P$ joss mallissa M kaikille täysille poluille $(s = s_0, s_1, \ldots)$
on olemassa i, jolle $M, s_i \models \neg P$

$M, s \not\models \mathbf{AF}\neg P$ joss mallissa M on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \ldots)$
ja kaikille i, $M, s_i \not\models \neg P$

$M, s \models \neg\mathbf{AF}\neg P$ joss mallissa M on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \ldots)$
ja kaikille i, $M, s_i \models P$

$M, s \models \mathbf{EG}P$ joss mallissa M on olemassa täysi polku $(s = s_0, s_1, \ldots)$
ja kaikille i, $M, s_i \models P$

4.

$M, x \models P\mathbf{U}Q$ joss on olemassa i, jolle $M, x^i \models Q$ ja kaikille $j < i$ $M, x^j \models P$
$M, x \models \top\mathbf{U}P$ joss on olemassa i, jolle $M, x^i \models P$ ja kaikille $j < i$ $M, x^j \models \top$
$M, x \models \mathbf{F}P$ joss on olemassa i, jolle $M, x^i \models P$

$M, x \models \mathbf{F}P$ joss on olemassa i, jolle $M, x^i \models P$
$M, x \models \mathbf{F}\neg P$ joss on olemassa i, jolle $M, x^i \models \neg P$
$M, x \not\models \mathbf{F}\neg P$ joss ei ole olemassa i, jolle $M, x^i \models \neg P$
$M, x \models \neg\mathbf{F}\neg P$ joss kaikille i $M, x^i \not\models \neg P$
$M, x \models \mathbf{G}P$ joss kaikille i $M, x^i \models P$

$M, x \models P\mathbf{U}Q$ joss on olemassa i, jolle $M, x^i \models Q$ ja kaikille $j < i$ $M, x^j \models P$
$M, x \models (\neg P)\mathbf{U}Q$ joss on olemassa i, jolle $M, x^i \models Q$ ja kaikille $j < i$ $M, x^j \models \neg P$
$M, x \not\models (\neg P)\mathbf{U}Q$ joss ei ole olemassa i, jolle $M, x^i \models Q$ tai jokaisella i, jolle $M, x^i \models Q$ on olemassa $j < i$, jolle $M, x^j \not\models \neg P$
$M, x \models P\mathbf{B}Q$ joss ei ole olemassa i, jolle $M, x^i \models Q$ tai jokaisella i, jolle $M, x^i \models Q$ on olemassa $j < i$, jolle $M, x^j \models P$