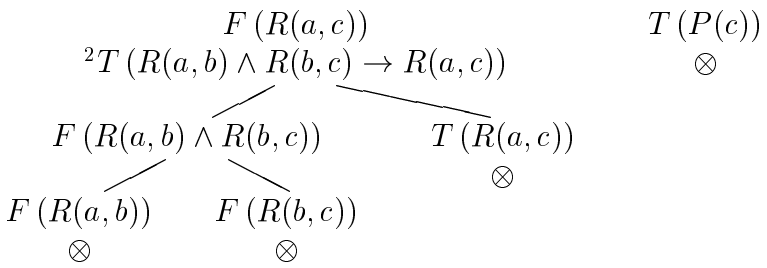
Tik-79.146 **Kevät 1999**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 8
Ratkaisut

1. **S4** on refleksiivisten ja transitiivisten kehysten joukko. Lause käännetään predikaattikalkyylimuotoon:

$$\begin{aligned}
\tau(\neg\Box\Box P \to \neg\Box P, x) &= \neg\tau(\Box\Box P, x) \to \neg\tau(\Box P, x) \\
&= \neg\forall y\big(R(x,y) \to \tau(\Box P, y)\big) \\
&\quad \to \neg\forall y\big(R(x,y) \to \tau(P, y)\big) \\
&= \neg\forall y\Big(R(x,y) \to \forall x\big(R(y,x) \to \tau(P, x)\big)\Big) \\
&\quad \to \neg\forall y\big(R(x,y) \to P(y)\big) \\
&= \neg\forall y\Big(R(x,y) \to \forall x\big(R(y,x) \to P(x)\big)\Big) \\
&\quad \to \neg\forall y\big(R(x,y) \to P(y)\big) \\
&= \varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
T\,(\forall x R(x,x)) \\
{}^{2}T\,(\forall x\forall y\forall z R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)) \\
F\,(\forall x\varphi) \\
F\,\Big(\neg\forall y\Big(R(a,y) \to \forall x\big(R(y,x) \to P(x)\big)\Big) \to \neg\forall y\big(R(a,y) \to P(y)\big)\Big) \\
T\,\Big(\neg\forall y\Big(R(a,y) \to \forall x\big(R(y,x) \to P(x)\big)\Big)\Big) \\
F\,\big(\neg\forall y\big(R(a,y) \to P(y)\big)\big) \\
F\,\Big(\forall y\Big(R(a,y) \to \forall x\big(R(y,x) \to P(x)\big)\Big)\Big) \\
{}^{1}T\,\big(\forall y\big(R(a,y) \to P(y)\big)\big) \\
F\,\big(R(a,b) \to \forall x\big(R(b,x) \to P(x)\big)\big) \\
T\,(R(a,b)) \\
F\,\big(\forall x\big(R(b,x) \to P(x)\big)\big) \\
F\,(R(b,c) \to P(c)) \\
T\,(R(b,c)) \\
F\,(P(c)) \\
{}^{1}T\,(R(a,c) \to P(c)) \\
\diagup \qquad \diagdown
\end{array}$$



2. Kehys $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$, $|S| = n$ ja $R \subseteq S \times S$ implikoi että kehysten määrä on

$$|\mathcal{P}(S \times S)| = 2^{n^2}$$

Joten $n = 10$ antaa $2^{100} \approx 1.3 \cdot 10^{30}$ kehystä.

Toisaalta, kaksi kehystä voidaan pitää samoina jos ne graafeina ovat isomorfiset. Silloin, kehysten määrä on

12005168

Tähän tulokseen päästään Polya'n enumeraatio-teorian avulla.

3. a) $M, s_1 \Vdash K_1 P$ koska $v(s_1, P) = v(s_2, P) = \mathbf{true}$,
$M, s_1 \Vdash K_2 P$ ja $M, s_1 \Vdash K_3 P$ koska $v(s_1, P) = \mathbf{true}$. Siis,
$M, s_1 \Vdash EP$.

   b) $M, s_1 \Vdash K_2 EP$ ja $M, s_1 \Vdash K_3 EP$ koska $M, s_1 \Vdash EP$. Lisäksi
$M, s_2 \Vdash K_1 P$ koska $v(s_1, P) = v(s_2, P) = \mathbf{true}$,
$M, s_2 \Vdash K_2 P$ koska $v(s_2, P) = v(s_3, P) = \mathbf{true}$ ja
$M, s_2 \Vdash K_3 P$ koska $v(s_2, P) = \mathbf{true}$. Täten
$M, s_2 \Vdash EP$ josta seuraa
$M, s_1 \Vdash K_1 EP$. Joten
$M, s_1 \Vdash EEP$.

   Toisaalta, tulos saadaan myös jos huomataan että P on tosi kaikissa maailmoissa, jotka ovat saavutettavissa s_1:ltä kahdella askelella.

   c) $M, s_1 \nVdash CP$ koska s_4 on C-saavutettava s_1:ltä ja $v(s_4, P) = \mathbf{false}$.