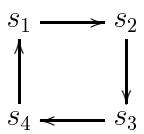
**Tik-79.146** **Kevät 1999**
**Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I**
**Laskuharjoitus 4**
**Ratkaisut**

1. $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$:




$\mathcal{F}' = \langle S', R'\rangle$, missä $S' = \{r_1, r_2\}$ ja $R' = \{\langle r_1, r_2\rangle,\ \langle r_2, r_1\rangle\}$:

Löydetään p-morfismi $f$:

$$f(s_1) = f(s_3) = r_1$$
$$f(s_2) = f(s_4) = r_2$$

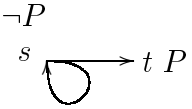
funktio $f$ on p-morfismi koska

1. $f$ on selvästi surjektiivinen
2. $\forall s, t \in S\ sRt$ implikoi $f(s)R'f(t)$
3. $\forall s \in S\ \forall t \in S'\ f(s)R't$ implikoi $\exists u \in S\ sRu$ ja $f(u) = t$.

Siis p-morfismi propositio sanoo että

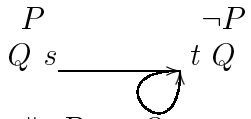
$$\mathcal{F} \models P \quad \text{implikoi} \quad \mathcal{F}' \models P$$

2. $M = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s\rangle,\ \langle s, t\rangle\}$, $v(s, P) = \text{false}$, ja $v(t, P) = \text{true}$.




$M \models \Box P \to P$ pätee ja $M, s \Vdash \Diamond\neg P$ pätee myös koska $M, s \Vdash \neg P$. Mutta $M, t \Vdash P$ implikoi $M, s \nVdash \Box\neg P$ joka implikoi $M, s \nVdash \Box\Box\neg P$. Siis $M$ on vastaesimerkki.

3. $M = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle,\ \langle t, t\rangle\}$, $v(s, P) = v(s, Q) = v(t, Q) = \text{true}$, ja $v(t, P) = \text{false}$.




   $M \models \Diamond Q$ pätee ja $M, s \Vdash P \leftrightarrow Q$ pätee myös. Mutta $M, s \Vdash \Box Q$ ja $M, s \nVdash \Box P$ implikoi $M, s \nVdash \Box P \leftrightarrow \Box Q$. Siis $M$ on vastaesimerkki.

4. Oletetaan

$$\Sigma \cup \{P\} \not\models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow Q$$

   Silloin on olemassa $M = \langle S, R, v\rangle$ siten että

$$M \models \Sigma \cup \{P\}$$

   ja

$$\exists s \in S : M, s \Vdash \Upsilon \quad \text{mutta} \quad M, s \nVdash Q$$

   Erityisesti $M, t \Vdash P$ kaikilla $t \in S$, joten

$$M, s \Vdash P \wedge \Box P \wedge \Box\Box P \wedge \Box\Box\Box P$$

   Myös $M \models \Sigma$, eli

$$\Sigma \not\models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P \wedge \Box P \wedge \Box\Box P \wedge \Box\Box\Box P \rightarrow Q$$