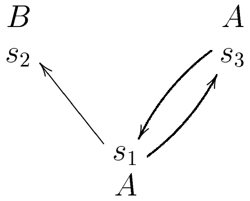
Tik-79.146 **Kevät 1999**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 3
Ratkaisut

1. $M = \langle S, R, v \rangle$



a) $M, s_1 \Vdash \Box A$ ei päde koska $M, s_2 \nVdash A$.

b) $M, s_1 \Vdash \Box\Diamond\top$ pätee jos

$$M, s_2 \Vdash \Diamond\top \quad \text{ja} \quad M, s_3 \Vdash \Diamond\top$$

mutta $M, s_2 \nVdash \Diamond\top$ koska ei ole olemassa $s \in S$ siten että $\langle s_2, s \rangle \in R$ ja $M, s \Vdash \top$.

c) $M, s_3 \Vdash \Box\Box\Box\bot$ pätee jos $M, s_1 \Vdash \Box\Box\bot$ joka pätee jos

$$M, s_2 \Vdash \Box\bot \quad \text{ja} \quad M, s_3 \Vdash \Box\bot$$

Mutta $M, s_3 \Vdash \Box\bot$ ei päde koska $M, s_1 \nVdash \bot$.

d) $M, s_1 \Vdash \Box(B \vee \Box\Diamond B)$ pätee jos

$$M, s_2 \Vdash B \vee \Box\Diamond B \quad \text{ja} \quad M, s_3 \Vdash B \vee \Box\Diamond B$$

$M, s_2 \Vdash B \vee \Box\Diamond B$ pätee koska $M, s_2 \Vdash B$. $M, s_3 \Vdash B \vee \Box\Diamond B$ pätee jos

$$M, s_3 \Vdash B \quad \text{tai} \quad M, s_3 \Vdash \Box\Diamond B$$

Nyt $M, s_3 \Vdash \Box\Diamond B$ jos $M, s_1 \Vdash \Diamond B$, joka pätee koska $M, s_2 \Vdash B$.

e) $M, s_1 \Vdash \Diamond(\Box A \wedge \Box\neg A)$ pätee jos

$$M, s_2 \Vdash \Box A \wedge \Box\neg A \quad \text{tai} \quad M, s_3 \Vdash \Box A \wedge \Box\neg A$$

Nähdään että $M, s_2 \Vdash \Box A \wedge \Box\neg A$ pätee koska sekä $M, s_2 \Vdash \Box A$ että $M, s_2 \Vdash \Box\neg A$ koska ei ole olemassa $s \in S$ siten että $\langle s_2, s \rangle \in R$.

2. a) $M = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s\}$, $R = \emptyset$, ja $v(s, A) = \text{false}$.

$$M, s \Vdash \Box A \quad \text{mutta} \quad M, s \nVdash A$$

Siis $M, s \nVdash \Box A \to A$.

b) $M = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle,\ \langle t, s\rangle\}$, $v(s, A) = \text{false}$, ja $v(t, A) = \text{true}$.

$$\neg A\ s \rightleftarrows t\ A$$

$M, s \Vdash \Box A$ mutta $M, s \nVdash \Box\Box A$ koska $M, t \nVdash \Box A$. Täten $M, s \nVdash \Box A \to \Box\Box A$.

c) $M = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle\}$, $v(t, A) = \text{false}$.

$$s \longrightarrow t\ \neg A$$

$M, s \Vdash \neg\Box A$ koska $M, s \nVdash \Box A$. $M, s \nVdash \Box\neg\Box A$ koska $M, t \Vdash \Box A$. Siis $M, s \nVdash \neg\Box A \to \Box\neg\Box A$.

3. a) Olkoon $M = \langle S, R, v\rangle$.
($\Rightarrow$) Ota $s \in S$. Silloin

$$M \Vdash \Diamond\top \quad \text{implikoi} \quad M, s \Vdash \Diamond\top.$$

Tällöin on olemessa $t \in S$ siten että $\langle s, t\rangle \in R$ ja $M, t \Vdash \top$. Tästä seuraa että

$$\text{jos} \quad M, s \Vdash \Box A \quad \text{niin myös} \quad M, t \Vdash A$$

ja siksi

$$M, s \Vdash \Diamond A.$$

Eli $M, s \Vdash \Box A \to \Diamond A$ jokaisella $s \in S$ ja näin ollen

$$M \Vdash \Box A \to \Diamond A.$$

($\Leftarrow$) Oletetaan $M \Vdash \Box A \to \Diamond A$. Valitse $s \in S$. Jos on olemassa $t \in S$ siten että $\langle s, t\rangle \in R$ niin

$$M, t \Vdash \top \quad \text{ja} \quad M, s \Vdash \Diamond\top.$$

Ellei näin ole niin $M, s \Vdash \Box A$ ja silloin myös $M, s \Vdash \Diamond A$. Mutta tästä seuraa että on olemessa $t \in S$ siten että $\langle s, t\rangle \in R$, mikä on selvä ristiriita.

b) $F = \langle S, R\rangle$, $S = \{s\}$ ja $R = \emptyset$. $F \Vdash \Box\bot$ koska ei ole olemassa $t \in S$ siten että $\langle s, t\rangle \in R$. Eli, kaikilla $t \in S$ $\langle s, t\rangle \in R$ implikoi $F, t \Vdash \bot$.