Tik-79.146 **Kevät 1999**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 2
Ratkaisut

1. a)

$$T\,(\exists x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2) \wedge \forall x_1 \forall x_2 (P(x_1, x_2) \rightarrow P(x_2, x_1)))$$
$$T\,(\exists x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2))$$
$$T\,(\forall x_1 \forall x_2 (P(x_1, x_2) \rightarrow P(x_2, x_1)))$$
$$T\,(P(c, d))$$
$$T\,(P(c, d) \rightarrow P(d, c))$$

$F\,(P(c, d))$ $\qquad$ $T\,(P(d, c))$

$\otimes$

Tästä saadan rakenne $\mathcal{A}$, jonka universumi on

$$A = \{c, d\}$$

Otetaan käyttöön vakiosymbolit s ja t ja predikaatti P siten että

$$s^{\mathcal{A}} = c, \qquad t^{\mathcal{A}} = d, \quad \text{ja} \quad P^{\mathcal{A}} = \{\langle c, d\rangle, \langle d, c\rangle\}$$

Tarkistetaan että lause on tosi rakenteessa:

$$\mathcal{A} \models \exists x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2)$$

koska esim. $\langle s^{\mathcal{A}}, t^{\mathcal{A}}\rangle \in P^{\mathcal{A}}$.

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \forall x_2 (P(x_1, x_2) \rightarrow P(x_2, x_1))$$

koska

$$\mathcal{A} \models P(s, s) \rightarrow P(s, s),$$
$$\mathcal{A} \models P(s, t) \rightarrow P(t, s),$$
$$\mathcal{A} \models P(t, s) \rightarrow P(s, t), \text{ ja}$$
$$\mathcal{A} \models P(t, t) \rightarrow P(t, t)$$

sillä $\langle s^{\mathcal{A}}, t^{\mathcal{A}}\rangle = \langle c, d\rangle \in P^{\mathcal{A}}$ ja $\langle t^{\mathcal{A}}, s^{\mathcal{A}}\rangle = \langle d, c\rangle \in P^{\mathcal{A}}$.

b) Käytetään rakenne $\mathcal{A}$, jonka universumi on $A = \{c\}$. Lisäksi tarvitaan vakiosymboli s ja predikaatti P siten että

$$s^{\mathcal{A}} = c, \quad \text{ja} \quad P^{\mathcal{A}} = \{\langle c, c\rangle\}$$

Tarkistetaan että

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2) \wedge \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P(x_1, x_2) \wedge P(x_2, x_3) \rightarrow P(x_1, x_3))$$

pätee.

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2)$$

koska meillä on ainoastaan yksi vakiosymboli ja

$$\mathcal{A} \models P(s, s)$$

Samalla syystä

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P(x_1, x_2) \wedge P(x_2, x_3) \rightarrow P(x_1, x_3))$$

koska

$$\mathcal{A} \models P(s, s) \wedge P(s, s) \rightarrow P(s, s)$$

2. a)

$$\begin{gathered} F\left((\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))\right) \\ T\left(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)\right) \\ F\left(\forall x (P(x) \vee Q(x))\right) \\ {}^1T\left(\forall x P(x)\right) \\ T\left(\forall x Q(x)\right) \\ F\left(P(c) \vee Q(c)\right) \\ F\left(P(c)\right) \\ F\left(Q(c)\right) \\ {}^1T\left(P(c)\right) \\ \otimes \end{gathered}$$

b)

$$
\begin{array}{c}
{}^{2}F\,(\exists y(\exists x P(x) \to P(y))) \\
F\,(\exists x P(x) \to P(c)) \\
{}^{1}T\,(\exists x P(x)) \\
F\,(P(c)) \\
{}^{1}T\,(P(d)) \\
{}^{2}F\,(\exists x P(x) \to P(d)) \\
T\,(\exists x P(x)) \\
F\,(P(d)) \\
\otimes
\end{array}
$$

3. Olkoon $s =$ "sataa".

   a) $K_a K_b s \wedge \neg K_b K_a K_b s$

   b) $K_a(\neg K_b s \wedge \neg K_b \neg s)$.

   c) $K_b(K_a s \vee K_a \neg s)$.

   d) $\neg K_a K_b K_a s \wedge \neg K_a \neg K_b K_a s$.

4. a) $\varphi \to LK\varphi$

   b) $L\varphi \wedge L\psi \to L(\varphi \wedge \psi)$

   c) $K\varphi \to L\varphi$

   d) $LL\varphi \to L\varphi$