Ratkaisumenetelmät temporaalilogiikalle

- Äärellisen mallin ominaisuus (vastamallin koolle yläraja)
- Taulumenetelmä (esim. CTL)

  (i) Rakennetaan tutkittavalle lauseelle taulugraafi, joka esittää (oleellisesti) kaikki lauseen mallit.

  (ii) Tarkistetaan, että kaikki tulevaisuuslauseet toteutuvat taulussa (mallintarkastus).
- Automaattiteoreettinen menetelmä (esim. LTL)

  (i) Rakennetaan tutkittavalle lauseelle äärellistilainen automaatti, joka hyväksyy äärettömiä objekteja (esim. jonoja) siten, että automaatti hyväksyy (oleellisesti) kaikki lauseen mallit.

  (ii) Tarkistetaan, onko automaatin hyväksymä kieli tyhjä.

Taulumenetelmä CTL:lle

CTL:n taulu on bipartiitti graafi, jossa on solmut ovat lausejoukkoja ja niitä on kahdentyyppisiä: OR-solmuja ja AND-solmuja.

Lauseelle P taulu rakennetaan muuntamalla P ensin **positiiviseen normaalimuotoon** (jossa negaatio esiintyy vain atomilauseen edessä) ja etenemällä sitten kahdessa vaiheessa:

(i) rakennetaan alustava taulu T_0 ja

(ii) muodostetaan lopullinen taulu T_1 karsintasäännöillä taulusta T_0.

CTL-lause muunnetaan **positiiviseen normaalimuotoon** seuraavilla säännöillä:

$$
\begin{array}{lcl}
P \to Q & \mapsto & \neg P \lor Q \\
\neg(P \lor Q) & \mapsto & \neg P \land \neg Q \\
\neg(P \land Q) & \mapsto & \neg P \lor \neg Q \\
\neg\neg P & \mapsto & P \\
\neg \mathbf{AG} P & \mapsto & \mathbf{EF} \neg P \\
\neg \mathbf{EF} P & \mapsto & \mathbf{AG} \neg P \\
\neg \mathbf{EG} P & \mapsto & \mathbf{AF} \neg P \\
\neg \mathbf{AF} P & \mapsto & \mathbf{EG} \neg P \\
\neg \mathbf{AX} P & \mapsto & \mathbf{EX} \neg P \\
\neg \mathbf{EX} P & \mapsto & \mathbf{AX} \neg P \\
\neg \mathbf{A}(P \mathbf{U} Q) & \mapsto & \mathbf{E}(\neg P \mathbf{B} Q) \\
\neg \mathbf{E}(P \mathbf{U} Q) & \mapsto & \mathbf{A}(\neg P \mathbf{B} Q) \\
\neg \mathbf{A}(P \mathbf{B} Q) & \mapsto & \mathbf{E}(\neg P \mathbf{U} Q) \\
\neg \mathbf{E}(P \mathbf{B} Q) & \mapsto & \mathbf{A}(\neg P \mathbf{U} Q)
\end{array}
$$

- Huom! Lyhennysmerkinnät:

  $\mathbf{A}(P\mathbf{B}Q)$: $\neg\mathbf{E}((\neg P)\mathbf{U}Q)$
  $\mathbf{E}(P\mathbf{B}Q)$: $\neg\mathbf{A}((\neg P)\mathbf{U}Q)$

- Positiivisessa normaalimuodossa negaatioita esiintyy vain atomilauseiden edessä.

- Merkintä $\sim P$: lauseen $\neg P$ positiivinen normaalimuoto.

  Esimerkki.

  $\sim \mathbf{AG}(R \to (\neg Q \land \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q))) =$
  $\mathbf{EF}(R \land (Q \lor \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)))$

Alustavan taulun T_0 muodostaminen:

- Aloitetaan OR-solmusta $D_0 = \{P\}$.
- OR-solmun D seuraajat ovat AND-solmuja, jotka saadaan soveltamalla α/β-**sääntöjä** solmuun D.
- AND-solmun C seuraajat ovat OR-solmuja, jotka saadaan **seuraajasäännöllä** solmusta C.

Huom! Jos OR-solmun D seuraaja C esiintyy jo taulussa, ei tauluun tule toista kopiota, vaan D:n seuraajaksi tulee jo olemassa oleva solmu C.
Samoin AND-solmuille.

OR-solmun D seuraajat ovat D:sta seuraavilla α**- ja** β**-säännöillä** saatavat alaspäin suljetut joukot.

Joukko C on alaspäin suljettu, kun seuraavat kaksi ehtoa toteutuvat:
(i) Jos $\alpha \in C$, $\alpha_1 \in C$ ja $\alpha_2 \in C$.
(ii) Jos $\beta \in C$, $\beta_1 \in C$ tai $\beta_2 \in C$.

α-säännöt:

$$\frac{P \wedge Q}{\begin{matrix} P \\ Q \end{matrix}} \qquad \frac{\mathbf{AG}P}{\begin{matrix} P \\ \mathbf{AXAG}P \end{matrix}} \qquad \frac{\mathbf{EG}P}{\begin{matrix} P \\ \mathbf{EXEG}P \end{matrix}}$$

$$\frac{\mathbf{A}(P\mathbf{B}Q)}{\begin{matrix} \sim Q \\ P \vee \mathbf{AXA}(P\mathbf{B}Q) \end{matrix}} \qquad \frac{\mathbf{E}(P\mathbf{B}Q)}{\begin{matrix} \sim Q \\ P \vee \mathbf{EXE}(P\mathbf{B}Q) \end{matrix}}$$

β-säännöt:

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q} \qquad \frac{\mathbf{AF}P}{P \mid \mathbf{AXAF}P} \qquad \frac{\mathbf{EF}P}{P \mid \mathbf{EXEF}P}$$

$$\frac{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)}{Q \mid P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)} \qquad \frac{\mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)}{Q \mid P \wedge \mathbf{EXE}(P\mathbf{U}Q)}$$

Huom! Literaaleille sekä $\mathbf{AX}P$ ja $\mathbf{EX}P$ lauseille ei sääntöjä.

Esimerkki.

Olkoon $D = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R)\}$

D:sta saatava alaspäin suljetut joukot ovat

$C_1 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R),$
$\mathbf{EF}((P \wedge Q) \vee R),$
$(P \wedge Q) \vee R, P \wedge Q, P, Q\}$

$C_2 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R),$
$\mathbf{EF}((P \wedge Q) \vee R),$
$(P \wedge Q) \vee R, R\}$

$C_3 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R),$
$\mathbf{EF}((P \wedge Q) \vee R),$
$\mathbf{EXEF}((P \wedge Q) \vee R)\}$

$C_4 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R),$
$\mathbf{AXAFEF}((P \wedge Q) \vee R)\}$

AND-solmun C seuraajat saadaan **seuraajasäännöllä**:

> Olkoon joukossa C seuraavatilalauseet:
>
> $\mathbf{AX}P_1, \ldots, \mathbf{AX}P_l,$
> $\mathbf{EX}Q_1, \ldots, \mathbf{EX}Q_k.$
>
> Tällöin C:llä on seuraajat:
>
> $D_1 = \{P_1, \ldots, P_l, Q_1\} \ldots$
> $D_k = \{P_1, \ldots, P_l, Q_k\}$

Esimerkki. Olkoon
$C = \{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q),$
$\mathbf{EG}P, P, \mathbf{EXEG}P,$
$\mathbf{EF}Q, \mathbf{EXEF}Q\}.$

Tällöin C:n seuraajat ovat
$D_1 = \{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{EG}P\}$ ja
$D_2 = \{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{EF}Q\}.$

Alustavasta taulusta T_0 saadaan lopullinen taulu suorittamalla karsintaa seuraavilla säännöillä, kunnes mitään niistä ei voida soveltaa.

- Poistetaan AND-solmu, joka sisältää lauseen ja sen negaation.
- Poistetaan AND-solmu, jos yksikin sen alkuperäisistä seuraajista on poistettu.
- Poistetaan OR-solmu, jos kaikki sen alkuperäisistä seuraajista on poistettu.
- Poistetaan AND-solmu, jos jokin sen tulevaisuuslause ei toteudu tämän hetkisessä taulussa.

Tulevaisuuslauseita ovat seuraavaa muotoa olevat lauseet:

$\mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)$
$\mathbf{EF}Q$
$\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$
$\mathbf{AF}Q$

Tulevaisuuslauseiden toteutuminen taulussa määritellään seuraavasti:

- Tulevaisuuslause $\mathbf{EF}Q$ ($\mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)$) toteutuu AND-solmussa C, joss taulusta löytyy solmusta C lähtevä polku AND-solmuun C', joka sisältää lauseen Q (ja polun kaikissa muissa AND-solmuissa on lause P).
- Tulevaisuuslause $\mathbf{AF}Q$ ($\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$) toteutuu AND-solmussa C, joss taulusta löytyy asyklinen aligraafi, jolle pätee:
  (i) Aligraafin juuri on solmu C.
  (ii) Kullekin OR-sisäsolmulle täsmälleen yksi sen AND-seuraajasolmu on aligraafissa.
  (iii) Kullekin AND-sisäsolmulle kaikki sen OR-seuraajasolmut ovat mukana aligraafissa.
  (iv) Kaikissa aligraafin lehtisolmuissa on lause Q (ja kaikissa muissa AND-solmuissa P).

Esimerkki. Olkoon $D_0 = \{\mathbf{EF}P \wedge \neg P\}$.

- D_0:n AND-seuraajat:
  $C_1 = \{\mathbf{EF}P \wedge \neg P, \mathbf{EF}P, \neg P, P\}$ ja
  $C_2 = \{\mathbf{EF}P \wedge \neg P, \mathbf{EF}P, \neg P, \mathbf{EXEF}P\}$
  (C_1 voidaan karsia)
- C_2:n OR-seuraajat: $D_1 = \{\mathbf{EF}P\}$
- D_1:n AND-seuraajat:
  $C_3 = \{\mathbf{EF}P, P\}$ ja
  $C_4 = \{\mathbf{EF}P, \mathbf{EXEF}P\}$
- C_3:n OR-seuraajat: $D_2 = \{\}$
- D_2:n AND-seuraajat: $C_5 = \{\}$
- C_5:n OR-seuraajat: $\{\} = D_2$
- C_4:n OR-seuraajat: $\{\mathbf{EF}P\} = D_1$
- Alustava taulu T_0 on valmis.
- Ainoa tulevaisuuslause $\mathbf{EF}P$ toteutuu jokaisessa AND-solmussa.
  Lopullinen taulu T_1 valmis.

Teoreema. Olkoon CTL-lause P positiivisessa normaalimuodossa. Tällöin P on toteutuva joss lopullisessa taulussa T_1 on AND-solmu, joka sisältää lauseen P.

- CTL-taulu antaa lauseen P mallin:
  Mallin tilat AND-solmuja ja valuaatio suoraan AND-solmun sisältämistä atomilauseista.
  Seuraajat valittava siten, että tulevaisuuslauseet toteutuvat.
- Taulumenetelmä ohjelmasynteesissä:
  (i) Ohjelman määrittely CTL-lauseina.
  (ii) Tauluilla määrittelylle automaattisesti malli, joka antaa ohjelman ohjausrakenteen.
- CTL-taulut antavat menetelmän myös LTL-toteutuvuuden tarkastamiseen:

Teoreema. Olkoon LTL-lause P positiivisessa normaalimuodossa ja CTL-lause P' saatu siitä korvaamalla operaattorit $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{B}$, operaattoreilla $\mathbf{AF}, \mathbf{AG}, \mathbf{AX}, \mathbf{AU}, \mathbf{AB}$. Tällöin P on LTL-toteutuva joss P' on CTL-toteutuva.

Laskennallinen vaativuus

- CTL

  Mallitarkastus: $\mathbf{P}$-täydellinen
  $O(|M| \cdot |P|)$

  Toteutuvuus: $\mathbf{EXPTIME}$-täydellinen

- LTL

  Mallitarkastus: $\mathbf{PSPACE}$-täydellinen
  $O(|M| \cdot exp(|P|))$

  Toteutuvuus: $\mathbf{PSPACE}$-täydellinen

- CTL*

  Mallitarkastus: $\mathbf{PSPACE}$-täydellinen
  $O(|M| \cdot exp(|P|))$

  Toteutuvuus: 2$\mathbf{EXPTIME}$-täydellinen

Tehokkaasti toteutettavia aliluokkia

- Toteutuvuusongelma ratkeaa polynomisessa ajassa esim. ohjelmasynteesin kannalta mielenkiintoisissa tapauksissa.

- Esim. SCTL (yksinkertaistettu CTL)

  $P_1 \vee \cdots \vee P_n$
  $\mathbf{AG}(P_1 \vee \cdots \vee P_n)$
  $\mathbf{AG}(P_0 \rightarrow \mathbf{AF}(P_1 \vee \cdots \vee P_n))$
  $\mathbf{AG}(P_0 \rightarrow \mathbf{A}(P_1 \vee \cdots \vee P_n \mathbf{U} Q_1 \vee \cdots \vee Q_m))$
  $\mathbf{AG}(P_0 \rightarrow \mathbf{AX}(P_1 \vee \cdots \vee P_n) \wedge$
  $\mathbf{EX}(Q_1 \vee \cdots \vee Q_m) \wedge \cdots \wedge \mathbf{EX}(R_1 \vee \cdots \vee R_l))$

  jossa ESC-oletus pätee: tulevaisuuslauseet eivät riipu historiasta.

- Esim. RLTL (rajoitettu LTL):

  $\mathbf{G}(P_1 \vee \cdots \vee P_n)$
  $\mathbf{G}(P_0 \rightarrow \mathbf{F}(P_1 \vee \cdots \vee P_n))$
  $\mathbf{G}(P_0 \rightarrow \mathbf{X}(P_1 \vee \cdots \vee P_n))$