TAULUMENETELMÄ MODAALILOGIIKALLE

- On vaikeaa löytää Hilbert-tyylisiä todistuksia:

  Käytössä Modus Ponens -sääntö: jotta voidaan johtaa Q, täytyy johtaa P ja $P \to Q$.

  Mutta mikä on sopiva P?

  Esim. $\{A \to B, A \to C\} \models A \to (B \wedge C)$

  1. $A \to B$
  2. $A \to C$
  3. $\vdots$
  4. $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$

- Alikaavaperiaate: lauseen Q todistuksessa tarvitaan vain Q:n alikaavoja.

  $\boxed{\Rightarrow}$ resoluutio, sekventtikalkyyli, taulumenetelmä.

Taulumenetelmä modaalilogiikalle $\mathbf{K}$

- **Prefiksi** on ei-tyhjä äärellinen jono luonnollisia lukuja.

  Esim. $\langle 1 \rangle$ ja $\langle 11, 1, 1, 1, 111, 2 \rangle$ ovat prefiksejä.

- **Prefiksoitu lause** on muotoa σP, missä σ on prefiksi ja P lause.

  Esim. $\langle 1 \rangle (P \vee \neg P)$ ja $\langle 11, 1, 1, 111, 2 \rangle \Box\Box\Diamond P$ ovat prefiksoituja lauseita.

- σn on prefiksi, joka saadaan prefiksistä σ liittämällä sen perään luku n.

  Esim. Jos $\sigma = \langle 1 \rangle$, $\sigma 11 = \langle 1, 11 \rangle$.

- $\mathbf{K}$-saavutettavuus: Prefiksi muotoa σn on $\mathbf{K}$-saavutettavissa prefiksistä σ.

  Esim. $\langle 1, 11, 11 \rangle$ on $\mathbf{K}$-saavutettavissa prefiksistä $\langle 1, 11 \rangle$.

Taulusäännöt

σP: P tosi maailmassa σ.

- Lauselogiikan säännöt (prefiksoiduille lauseille):

$$\frac{\sigma\neg\neg P}{\sigma P} \qquad \frac{\sigma\alpha}{\sigma\alpha_1 \\ \sigma\alpha_2} \qquad \frac{\sigma\beta}{\sigma\beta_1 \mid \sigma\beta_2}$$

Esimerkki.

1. $\langle 3,2,1\rangle\neg((\neg P \to Q) \to P)$
2. $\langle 3,2,1\rangle(\neg P \to Q)$ (1)
3. $\langle 3,2,1\rangle\neg P$ (1)

4. $\langle 3,2,1\rangle\neg\neg P$ (2)	5. $\langle 3,2,1\rangle Q$ (2)
6. $\langle 3,2,1\rangle P$ (4)	
$\times$	

Määritelmä. Prefiksi on haarassa
(i) **tarjolla**, jos se esiintyy haarassa,
(ii) **rajoittamaton**, jos ei ole minkään haarassa esiintyvän prefiksin alkuosa.

Esim. Prefiksi $\langle 1,1\rangle$ on prefiksien $\langle 1,1,12,3\rangle$ ja $\langle 1,1\rangle$ alkuosa.

- **Modaalisäännöt:**

$\Box$: $$\frac{\sigma\Box P}{\sigma n P}$$

mille tahansa tarjolla olevalle prefiksille σn.

$\neg\Box$: $$\frac{\sigma\neg\Box P}{\sigma n\neg P}$$

rajoittamattomalle prefiksille σn.

Esimerkki.

1. $\langle 1\rangle\neg(\Box P \to \Box\Box P)$
2. $\langle 1\rangle\Box P$ (1)
3. $\langle 1\rangle\neg\Box\Box P$ (1)
4. $\langle 1,1\rangle\neg\Box P$ (3)
5. $\langle 1,1\rangle P$ (2)
6. $\langle 1,1,1\rangle\neg P$ (4)

Määritelmä. Taulun haara on **suljettu**, jos se sisältää sekä σP että $\sigma\neg P$ jollekin lauseelle P ja prefiksille σ (tai jos se sisältää $\sigma\bot$ tai $\sigma\neg\top$).

Taulu on suljettu, jos jokainen sen haara on suljettu.

Lauseen P **todistus** on taulu, jonka juurena on $\langle 1\rangle\neg P$ ja joka on suljettu.

Esimerkki. Lauseen $\Box(P\wedge Q)\to(\Box P\wedge\Box Q)$ taulutodistus.

1.	$\langle 1\rangle\neg(\Box(P\wedge Q)\to(\Box P\wedge\Box Q))$				
2.	$\langle 1\rangle\Box(P\wedge Q)$				(1)
3.	$\langle 1\rangle\neg(\Box P\wedge\Box Q)$				(1)
4.	$\langle 1\rangle\neg\Box P$	(3)	5.	$\langle 1\rangle\neg\Box Q$	(3)
6.	$\langle 1,2\rangle\neg P$	(4)	9.	$\langle 1,2\rangle\neg Q$	(5)
7.	$\langle 1,2\rangle P\wedge Q$	(2)	10.	$\langle 1,2\rangle P\wedge Q$	(2)
8.	$\langle 1,2\rangle P$	(7)	11.	$\langle 1,2\rangle Q$	(10)
	$\times$			$\times$	

Virheettömyys (soundius)

Teoreema. Jos taulu, jonka juuri on $\langle 1\rangle\neg P$, on suljettu, lause P on $\mathbf{K}$-pätevä.

Todistus.

- Määritellään taululle $\mathbf{K}$-toteutuvuus:
  taulu on $\mathbf{K}$-toteutuva, jos sen jokin haara "vastaa" mallia.
- Osoitetaan, että
  (i) $\mathbf{K}$-toteutuva taulu ei voi sulkeutua,
  (ii) jos P ei ole $\mathbf{K}$-pätevä, $\langle 1\rangle\neg P$ on $\mathbf{K}$-toteutuva,
  (iii) jokainen sääntö säilyttää $\mathbf{K}$-toteutuvuuden:
  jos taulu on **$\mathbf{K}$-toteutuva** ennen säännön soveltamista, se on **$\mathbf{K}$-toteutuva** myös säännön soveltamisen jälkeen.

  Tällöin jos P ei ole $\mathbf{K}$-pätevä, lauseen $\langle 1\rangle\neg P$ taulu säilyy avoimena.

$\boxed{\Rightarrow}$ Jos taulu prefiksoidulle lauseelle $\langle 1\rangle\neg P$ on suljettu, lause P on $\mathbf{K}$-pätevä.

Määritelmä. Taulu on **K-toteutuva**, jos joku sen haaroista on **K**-toteutuva.

Taulun haara on **K-toteutuva**, jos haarassa esiintyvien prefiksoitujen lauseiden joukko on **K**-toteutuva.

Joukko prefiksoituja lauseita Σ on **K**-toteutuva, jos on olemassa malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ ja kuvaus $\mathcal{N}$ Σ:ssa esiintyvistä prefikseistä joukolle S siten, että

1. Jos prefiksit σ ja τ esiintyvät joukossa Σ ja τ on **K**-saavutettavissa prefiksistä σ, tällöin $\mathcal{N}(\sigma)R\mathcal{N}(\tau)$.
2. Jos $\sigma P \in \Sigma$, niin $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \mid\!\mid\!\vdash P$.

$\boxed{\Rightarrow}$ (i) **K**-toteutuva taulu ei voi sulkeutua.

(ii) Jos lause P ei ole **K**-pätevä, $\langle 1\rangle\neg P$ on **K**-toteutuva.

Näin on, koska lauseella $\neg P$ on malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ siten, että $\mathcal{M}, s' \mid\!\mid\!\vdash \neg P$. Tällöin $\langle 1\rangle\neg P$ on **K**-toteutuva kuvauksella $\mathcal{N}(\langle 1\rangle) = s'$.

(iii) Olkoon taulu Γ **K-toteutuva**.
Taulussa Γ on haara, jonka lauseet Σ ovat **K**-toteutuvia mallilla $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ ja kuvauksella $\mathcal{N}$.

Osoitetaan, että kun sovelletetaan mitä tahansa taulusääntöä, näin saatava taulu Γ' on myös **K**-toteutuva.

Sovelletetaan taulusääntöä **K**-toteutuvaan haaraan:

- $\dfrac{\sigma\beta}{\sigma\beta_1 \mid \sigma\beta_2}$

  Tällöin taulussa Γ' haarat, joiden lausejoukot
  $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\sigma\beta_1\}$
  $\Sigma_2 = \Sigma \cup \{\sigma\beta_2\}$
  Koska $\sigma\beta \in \Sigma$, $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \mid\!\mid\!\vdash \beta$,
  joten $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \mid\!\mid\!\vdash \beta_1$ tai $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \mid\!\mid\!\vdash \beta_2$.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Γ' **K-toteutuva**.

- $\dfrac{\sigma\alpha}{\sigma\alpha_1}$
  $\sigma\alpha_2$

  Samaan tapaan.

- $\dfrac{\sigma\Box P}{\sigma n P}$ tarjolla olevalle prefiksille σn.

  Tällöin taulussa Γ' haara, jonka lausejoukko $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\sigma n P\}$.

  Koska $\sigma\Box P \in \Sigma$, $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \mid\!\!\vdash \Box P$, joten kaikille t, $\mathcal{N}(\sigma) R t$, $\mathcal{M}, t \mid\!\!\vdash P$.

  Koska σn on $\mathbf{K}$-saavutettavissa σ:sta, $\mathcal{N}(\sigma) R \mathcal{N}(\sigma n)$. Siis $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma n) \mid\!\!\vdash P$.

  $\boxed{\Rightarrow}$ Γ' **$\mathbf{K}$-toteutuva**.

- $\dfrac{\sigma\neg\Box P}{\sigma n \neg P}$ rajoittamattomalle prefiksille σn.

  Tällöin taulussa Γ' haara, jonka lausejoukko $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\sigma n \neg P\}$.

  Koska $\sigma\neg\Box P \in \Sigma$, $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \mid\!\!\vdash \neg\Box P$, joten on olemassa t, $\mathcal{N}(\sigma) R t$, $\mathcal{M}, t \mid\!\!\vdash \neg P$.

  Koska σn ei ole mikään Σ prefiksin alkuosa, kuvausta $\mathcal{N}$ voidaan laajentaa: $\mathcal{N}(\sigma n) = t$. Tällöin $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma n) \mid\!\!\vdash \neg P$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Γ' **$\mathbf{K}$-toteutuva**. ■

Systemaattinen $\mathbf{K}$-taulu lauseelle P:

1. Taulun juureksi $\langle 1\rangle\neg P$.
2. WHILE taulu ei ole suljettu eikä kaikkia lauseita merkitty käytetyiksi DO BEGIN
2.1 Valitaan taulusta ylin käyttämätön solmu σQ.
2.2 Jos Q ei ole literaali, jokaiselle avoimelle haaralle θ, joka kulkee σQ kautta:
   - Jos σQ on muotoa $\sigma\alpha$, lisätään haaran θ loppuun ensin solmu $\sigma\alpha_1$ ja sitten $\sigma\alpha_2$.
   - Jos σQ on muotoa $\sigma\beta$, lisätään θ:n loppuun kaksi lapsisolmua $\sigma\beta_1$ ja $\sigma\beta_2$ (haarautuminen).
   - Jos σQ on muotoa $\sigma\neg\Box P$, lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n\neg P$ jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle σn.
   - Jos σQ on muotoa $\sigma\Box P$, kaikille tässä haarassa tarjolla oleville σn lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n P$ sekä lisäksi solmu $\sigma\Box P$.

2.3 Merkitään σQ käytetyksi.
END.

Täydellisyys

Teoreema. Jos P on $\mathbf{K}$-pätevä, lauseen P systemaattinen $\mathbf{K}$-taulu sulkeutuu.

Todistus. Osoitetaan, että jos lauseen P systemaattisessa $\mathbf{K}$-taulussa on avoin haara, P ei ole $\mathbf{K}$-pätevä.

Olkoon θ valmiin systemaattisen taulun avoin haara ja olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ seuraava malli.

1. S on θ:ssa esiintyvien prefiksien joukko.

2. $\sigma R \tau$ joss τ on $\mathbf{K}$-saavutettavissa σ:sta.

3. $v(\sigma, Q) = \mathrm{true}$ joss σQ esiintyy θ:ssa atomilauseelle Q.

Todistetaan induktiolla lauseen Q pituuden suhteen:

jos $\sigma Q \in \theta$, niin $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash Q$.

Koska $\langle 1\rangle \neg P$ jokaisessa haarassa, $\mathcal{M}, \langle 1\rangle \mid\!\!\vdash \neg P$. Täten P ei ole $\mathbf{K}$-pätevä.

(literaali) Jos Q on atomilause ja $\sigma Q \in \theta$, niin $v(\sigma, Q) = \mathrm{true}$ ja $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash Q$.

Jos $\sigma\neg Q \in \theta$, Q on atomilause ja $\sigma Q \notin \theta$. Tällöin $\mathcal{M}, \sigma \not\mid\!\!\vdash Q$ ja $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash \neg Q$.

IH: Jos Q on lyhyempi kuin j ja $\sigma Q \in \theta$, $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash Q$. Olkoon lauseen Q pituus j.

(β) Jos $\sigma\beta \in \theta$, tällöin $\sigma\beta_1 \in \theta$ tai $\sigma\beta_2 \in \theta$.
[IH] $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash \beta_1$ tai $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash \beta_2$. Täten $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash \beta$.

(α) Jos $\sigma\alpha \in \theta$, tällöin $\sigma\alpha_1 \in \theta$ ja $\sigma\alpha_2 \in \theta$.
[IH] $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash \alpha_1$ ja $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash \alpha_2$. Täten $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash \alpha$.

($\neg\Box$) Jos $\sigma\neg\Box Q \in \theta$, $\sigma n\neg Q \in \theta$.
[IH] $\mathcal{M}, \sigma n \mid\!\!\vdash \neg Q$. Siis $\mathcal{M}, \sigma \not\mid\!\!\vdash \Box Q$, koska $\sigma R \sigma n$.

($\Box$) Jos $\sigma\Box Q \in \theta$, $\sigma n Q \in \theta$ kaikilla σn, jotka tarjolla θ:ssa.
[IH] $\mathcal{M}, \sigma n \mid\!\!\vdash Q$. Täten $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash \Box Q$.

Siis jokaiselle avoimelle haaralle θ:
jos $\sigma Q \in \theta$, $\mathcal{M}, \sigma \mid\!\!\vdash Q$. ■

Ratkaisuproseduuri (lauseen P $\mathbf{K}$-pätevyydelle):
1. Taulun juureksi $\langle 1\rangle\neg P$.
2. WHILE taulu ei ole suljettu eikä kaikkia lauseita merkitty käytetyiksi DO BEGIN
2.1 Valitaan taulusta ylin käyttämätön solmu σQ.
2.2 Jos Q ei ole literaali, jokaiselle haaralle θ, joka kulkee σQ kautta:

- Jos σQ on muotoa $\sigma\alpha$, lisätään haaran θ loppuun ensin solmu $\sigma\alpha_1$ ja sitten $\sigma\alpha_2$.
- Jos σQ on muotoa $\sigma\beta$, lisätään θ:n loppuun kaksi lapsisolmua $\sigma\beta_1$ ja $\sigma\beta_2$ (haarautuminen).
- Jos σQ on muotoa $\sigma\neg\Box P$ lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n\neg P$ jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle σn sekä tämän jälkeen σnX kullekin haarassa esiintyvälle $\sigma\Box X$.
- Jos σQ on muotoa $\sigma\Box P$, kaikille tässä haarassa tarjolla oleville σn lisätään haaran θ loppuun solmu σnP.

2.3 Merkitään σQ käytetyksi.
END.

Esimerkki. Tutkitaan taulumenetelmällä, onko $\Box P \to \Box\Box P$ $\mathbf{K}$-pätevä.

Rakennetaan $\mathbf{K}$-taulu ratkaisuproseduurilla.

1.	$\langle 1\rangle\neg(\Box P \to \Box\Box P)$	
2.	$\langle 1\rangle\Box P$	(1)
3.	$\langle 1\rangle\neg\Box\Box P$	(1)
4.	$\langle 1,2\rangle\neg\Box P$	(3)
5.	$\langle 1,2\rangle P$	$(2/3)$
6.	$\langle 1,2,3\rangle\neg P$	(4)

Koska taulu jää auki, voidaan avoimesta haarasta koota **vastamalli** $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä

$S = \{\langle 1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,2,3\rangle\}$
$R = \{\langle\langle 1\rangle, \langle 1,2\rangle\rangle, \langle\langle 1,2\rangle, \langle 1,2,3\rangle\rangle\}$ ja
$v(\sigma, P) = \mathrm{true}$ joss $\sigma = \langle 1,2\rangle$.

Nyt $\mathcal{M}, \langle 1\rangle \not\models \Box P \to \Box\Box P$.

Muut modaalilogiikat

Laajennetaan edellä esitetty taulumenetelmä käsittelemään myös muita modaalilogiikoita kuin $\mathbf{K}$.

Määritelmä. Prefiksi τ on prefiksin σ **yksinkertainen jatko**, jos τ on muotoa σn jollekin n.

Taulumenetelmä modaalilogiikalle $\mathbf{L}$:

$\neg\Box$-sääntö:

$$\frac{\sigma\neg\Box P}{\tau\neg P} \qquad \frac{\sigma\Diamond P}{\tau P}$$

missä τ on haarassa rajoittamaton prefiksin σ yksinkertainen jatko.

$\Box$-sääntö:

$$\frac{\sigma\Box P}{\tau P} \qquad \frac{\sigma\neg\Diamond P}{\tau\neg P}$$

missä τ $\mathbf{L}$-saavutettavissa prefiksistä σ ja

1. logiikoille $\mathbf{K}$, $\mathbf{KB}$, $\mathbf{K4}$

   τ on tarjolla haarassa;

2. logiikoille $\mathbf{D}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{DB}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D4}$, $\mathbf{S4}$, $\mathbf{S5}$

   (i) τ on tarjolla haarassa tai

   (ii) τ on rajoittamaton prefiksin σ yksinkertainen jatko.

Määritelmä. Prefiksien saavutettavuusrelaatio:

1. yleinen, jos σn on saavutettavissa prefiksistä σ kaikilla n;
2. käänteinen, jos σ on saavutettavissa prefiksistä σn kaikilla n;
3. refleksiivinen, jos σ on saavutettavissa σ:sta;
4. transitiivinen, jos τ on saavutettavissa prefiksistä σ aina, kun σ on τ:n aito alkuosa.
5. universaalinen, jos prefiksi on saavutettavissa mistä tahansa prefiksistä.

Logiikka $\mathbf{L}$	$\mathbf{L}$-saavutettavuus
$\mathbf{K}, \mathbf{D}$	yleinen
$\mathbf{T}$	yleinen, refleksiivinen
$\mathbf{KB}, \mathbf{DB}$	yleinen, käänteinen
$\mathbf{B}$	yleinen, refleksiivinen, käänteinen
$\mathbf{K4}, \mathbf{D4}$	yleinen, transitiivinen
$\mathbf{S4}$	yleinen, refleksiivinen, transitiivinen
$\mathbf{S5}$	universaali

Esimerkkejä.

$\mathbf{D}$-taulutodistus lauseelle $\Box P \to \neg\Box\neg P$.

1. $\langle 1\rangle\neg(\Box P \to \neg\Box\neg P)$
2. $\langle 1\rangle\Box P$ (1)
3. $\langle 1\rangle\neg\neg\Box\neg P$ (1)
4. $\langle 1\rangle\Box\neg P$ (3)
5. $\langle 1,2\rangle\neg P$ (4) Huom. 2.(ii)
6. $\langle 1,2\rangle P$ (2)

$\times$

$\mathbf{T}$-taulutodistus lauseelle $\Box P \to P$.

1. $\langle 1\rangle\neg(\Box P \to P)$
2. $\langle 1\rangle\Box P$ (1)
3. $\langle 1\rangle\neg P$ (1)
4. $\langle 1\rangle P$ (2) Huom. refleksiivisyys

$\times$

K4-taulutodistus lauseelle $\Box P \to \Box\Box P$.

1. $\langle 1\rangle\neg(\Box P \to \Box\Box P)$
2. $\langle 1\rangle\Box P$ (1)
3. $\langle 1\rangle\neg\Box\Box P$ (1)
4. $\langle 1,2\rangle\neg\Box P$ (3)
5. $\langle 1,2,3\rangle\neg P$ (4)
6. $\langle 1,2,3\rangle P$ (2) Huom. transit.

$\times$

KB-taulutodistus lauseelle $P \to \Box\Diamond P$.

1. $\langle 1\rangle\neg(P \to \Box\Diamond P)$
2. $\langle 1\rangle P$ (1)
3. $\langle 1\rangle\neg\Box\Diamond P$ (1)
4. $\langle 1,2\rangle\neg\Diamond P$ (3)
5. $\langle 1\rangle\neg P$ (4) Huom. käänteisyys

$\times$

Systemaattinen **L**-taulu lauseelle P

Kuten logiikalle **K**, mutta kohta 2.2 tarkennettuna:
2.2 Jos Q ei ole literaali, jokaiselle avoimelle haaralle θ, joka kulkee σQ kautta:

- Jos σQ on muotoa $\sigma\neg\Box P$ ($\sigma\Diamond P$), lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n\neg P$ (σnP) jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle σn.

- Jos σQ on muotoa $\sigma\Box P$ ($\sigma\neg\Diamond P$),
  (a) Kun **L** on **K**, **KB**, **K4**, **T**, **B**, **S4**, **S5**:
  jokaiselle θ:ssa tarjolla olevalle σ', joka on **L**-saavutettavissa σ:sta, lisätään θ:n loppuun solmu $\sigma' P$ ($\sigma'\neg P$) ja lopuksi $\sigma\Box P$ ($\sigma\neg\Diamond P$).
  (b) Kun **L** on **D**, **DB**, **D4**:
  jokaiselle θ:ssa tarjolla olevalle σ', joka on **L**-saavutettavissa σ:sta, lisätään θ:n loppuun solmu $\sigma' P$ ($\sigma'\neg P$). Jos tällaisia prefiksejä σ' ei ole, lisätään θ:n loppuun solmu σnP ($\sigma n\neg P$) jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle σn. Kummassakin tapauksessa lisätään vielä haaran loppuun $\sigma\Box P$ ($\sigma\neg\Diamond P$).

S5-taulut

Prefikseinä riittävät luonnolliset luvut.

$\neg\Box$-sääntö: $\dfrac{n\neg\Box P}{k\neg P}$ $\dfrac{n\Diamond P}{kP}$

missä k ei esiinny haarassa.

$\Box$-sääntö: $\dfrac{n\Box P}{kP}$ $\dfrac{n\neg\Diamond P}{k\neg P}$

mille tahansa k.

Esimerkki. S5-taulutodistus lauseelle $\neg\Box P \to \Box\neg\Box P$.

1. $1\neg(\neg\Box P \to \Box\neg\Box P)$
2. $1\neg\Box P$ (1)
3. $1\neg\Box\neg\Box P$ (1)
4. $2\neg P$ (2)
5. $3\neg\neg\Box P$ (3)
6. $3\Box P$ (5)
7. $2P$ (6)

$\times$

Systemaattinen menetelmä (**S5**-pätevyydelle):
1. Taulun juureksi $1\neg P$.
2. WHILE taulu ei ole suljettu eikä kaikkia lauseita merkitty käytetyiksi DO BEGIN
2.1 Valitaan taulusta ylin käyttämätön solmu nQ.
2.2 Jos Q ei ole literaali, jokaiselle avoimelle haaralle θ, joka kulkee nQ kautta:

- Jos nQ on muotoa $n\alpha$, lisätään haaran θ loppuun ensin solmu $n\alpha_1$ ja sitten $n\alpha_2$.
- Jos nQ on muotoa $n\beta$, lisätään θ:n loppuun kaksi lapsisolmua $n\beta_1$ ja $n\beta_2$ (haarautuminen).
- Jos nQ on muotoa $n\neg\Box P$, lisätään haaran θ loppuun solmu $k\neg P$ jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle k sekä tämän jälkeen kX kullekin haarassa esiintyvälle $j\Box X$.
- Jos nQ on muotoa $n\Box P$, kaikille tässä haarassa tarjolla oleville k lisätään haaran θ loppuun solmu kP.

2.3 Merkitään nQ käytetyksi.
END.

KD45-taulut

Prefikseinä riittävät luonnolliset luvut.

$\neg\Box$-sääntö: $\dfrac{n\neg\Box P}{k\neg P}$ $\dfrac{n\Diamond P}{kP}$

missä k ei esiinny haarassa.

$\Box$-sääntö: $\dfrac{n\Box P}{kP}$ $\dfrac{n\neg\Diamond P}{k\neg P}$

mille tahansa $k \neq 1$.

Esimerkki. Vertaa.

$(\Box P \to P)$: 1. $1\neg(\Box P \to P)$
2. $1\Box P$ (1)
3. $1\neg P$ (1)

$\Box(\Box P \to P)$: 1. $1\neg\Box(\Box P \to P)$
2. $2\neg(\Box P \to P)$ (1)
3. $2\Box P$ (2)
4. $2\neg P$ (2)
5. $2P$ (3)

$\times$

Looginen seuraavuus taulumenetelmällä

Tehtävä: $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$

Tarvitaan kaksi uutta sääntöä premissejä varten.

Globaali sääntö: solmulla σQ voidaan jatkaa mitä tahansa haaraa mille tahansa haarassa tarjolla olevalla prefiksillä σ ja mille tahansa $Q \in \Sigma$.

Lokaali sääntö: solmulla $\langle 1\rangle Q$ voidaan jatkaa mitä tahansa haaraa mille tahansa $Q \in \Upsilon$.

Esimerkki. $\{P\} \models_{\mathbf{K}} \{\Box P \to Q\} \Longrightarrow Q$:

1. $\langle 1\rangle\neg Q$
2. $\langle 1\rangle\Box P \to Q$ (LP)

3. $\langle 1\rangle\neg\Box P$ (2)
5. $\langle 1,2\rangle\neg P$ (2)
6. $\langle 1,2\rangle P$ (GP)

$\times$

4. $\langle 1\rangle Q$ (2)

$\times$