MODAALILOGIIKKA I

Sisältö:
—Johdanto
—Syntaksi
—Semantiikka
—Perusominaisuuksia

Johdanto

- Käsitteiden välttämätön, aikominen, tietäminen, uskominen, tuleva, mennyt, todistuva, tosi tapahtuman jälkeen, . . . logiikkaa
- Mitkä ovat ko. käsitteiden ominaisuudet?

  Jos tiedät jotain, tiedätkö että tiedät sen?

  Jos et tiedät jotain, tiedätkö ettet tiedät sitä?

  Jos tiedät jotain, onko asia totta?
- Systemaattinen (Kripke/mahdollisten maailmojen) semantiikkaan perustuva lähestymistapa.

Esimerkki: Mutaiset lapset — tietämyslogiikka

- Kaksi lasta, joilla kummallakin mutainen otsa.
- Lapset näkevät toisensa.
- Äiti sanoo: "ainakin toisella on mutainen otsa".
- Äiti kysyy: "tiedättekö, onko otsanne mutainen vai ei"?
- Molemmat vastaavat "en tiedä".
- Äiti kysyy: "tiedättekö, onko otsanne mutainen vai ei"?
- Molemmat vastaavat: "tiedän otsani olevan mutainen".

???????

Formalisointi: Lapset a ja b.
A: a:lla mutainen otsa
B: b:lla mutainen otsa
K_aB: a tietää, että b:lla on mutainen otsa.

Äiti sanoo: "ainakin toisella on mutainen otsa".

$A \vee B$
$K_a(A \vee B)$
$K_b(A \vee B)$

$$K_a K_b(A \vee B) \tag{1}$$

Lapset näkevät toisensa.

$$K_a(K_b A \vee K_b \neg A) \tag{2}$$

Äiti kysyy: "tiedättekö, onko otsanne mutainen vai ei"? Molemmat vastaavat "en tiedä".

$$K_a \neg K_b B \tag{3}$$

Lauseista 1–3 seuraa $K_a A$.

Millä perusteella?

Semanttinen tarkaskelu

Miten esitetään tietämistä ja ei-tietämistä?

- Joukko lausekalkyylin malleja (mahdollisia maailmoja).
- a tietää P:n ($K_a P$) joss P tosi kaikissa mahdollisissa maailmoissa.

  Esim. Olkoon a:n mahdollisten maailmojen joukko $\{\{P, Q\}, \{Q\}\}$. Tällöin $K_a Q$ on tosi, mutta $K_a P$ ei ole.
- Mitkä maailmat mahdollisia?

  Formalisoidaan tietäminen seuraavasti:

  Kussakin maailmassa s agentilla a on joukko a:n kannalta samanarvoisia mahdollisia maailmoja.

  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikkien maailmojen luokka jakaantuu a kannalta kokoelmaksi erillisiä joukkoja mahdollisia maailmoja. Samoin b:n kannalta.

Osoitetaan, että lauseista 1–3 loogisesti seuraa K_aA, t.s. että jokaisessa tietämysmallin maailmassa, jossa lauseet 1–3 ovat totta, on K_aA totta.

Olkoon S jokin a:n kannalta mahdollisten maailmojen joukko ja s eräs S:n maailma.
S jakaantuu erillisiin joukkoihin $T_1, T_2, \ldots$ b:n kannalta mahdollisia maailmoja.

- Lause $K_a(K_bA \vee K_b\neg A)$ tosi s:ssä.

  $(K_bA \vee K_b\neg A)$ tosi kaikissa S:n maailmoissa.

  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$
  joko A on tosi kaikissa T_i:n maailmoissa tai
  A on epätosi kaikissa T_i:n maailmoissa.

- Lause $K_aK_b(A \vee B)$ tosi s:ssä.

  Kaikille $i = 1, 2, \ldots$
  $A \vee B$ on tosi kaikissa T_i:n maailmoissa.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$
  joko A on tosi kaikissa T_i:n maailmoissa tai
  B on tosi kaikissa T_i:n maailmoissa.

- $K_a\neg K_bB$ tosi s:ssä.

  Kaikille $i = 1, 2, \ldots$
  B on epätosi jossain T_i:n maailmassa.

  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$
  A on tosi kaikissa T_i:n maailmoissa.

  $\boxed{\Rightarrow}$ A on tosi kaikissa S:n maailmoissa.

  $\boxed{\Rightarrow}$ K_aA tosi s:ssä

Syntaktinen tarkastelu

Mitä tietämiseen liittyviä periaatteita tarvitaan?

Prop. päättely: tautologiat + MP: $\dfrac{P, P \to Q}{Q}$

Distributiivisuus:

$$K_a(P \to Q) \to (K_a P \to K_a Q)$$

N-sääntö:

$$\frac{P}{K_a P}$$

R-sääntö:

$$\frac{P \to Q}{K_a P \to K_a Q}$$

Huom! Johdettu sääntö:

1.	$P \to Q$	
2.	$K_a(P \to Q)$	[N, 1]
3.	$K_a(P \to Q) \to (K_a P \to K_a Q)$	[Distr]
4.	$(K_a P \to K_a Q)$	[MP, 2,3]

T: $K_a P \to P$

1.	$K_a K_b(\neg A \to B)$	[P1]
2.	$K_a(\neg K_b \neg A \to K_b A)$	[P2]
3.	$K_a \neg K_b B$	[P3]
4.	$K_b(\neg A \to B) \to (K_b \neg A \to K_b B)$	[Distr]
5.	$K_a K_b(\neg A \to B) \to$ $K_a(K_b \neg A \to K_b B)$	[R, 4]
6.	$K_a(K_b \neg A \to K_b B)$	[MP, 1, 5]
7.	$(K_b \neg A \to K_b B) \to$ $(\neg K_b B \to \neg K_b \neg A)$	[Taut]
8.	$K_a(K_b \neg A \to K_b B) \to$ $K_a(\neg K_b B \to \neg K_b \neg A)$	[R, 7]
9.	$K_a(\neg K_b B \to \neg K_b \neg A)$	[MP, 6, 8]
10.	$K_a(\neg K_b B \to \neg K_b \neg A) \to$ $(K_a \neg K_b B \to K_a \neg K_b \neg A)$	[Distr]
11.	$K_a \neg K_b B \to K_a \neg K_b \neg A$	[MP, 9, 10]
12.	$K_a \neg K_b \neg A$	[MP, 3, 11]
13.	$K_a(\neg K_b \neg A \to K_b A) \to$ $(K_a \neg K_b \neg A \to K_a K_b A)$	[Distr]
14.	$K_a \neg K_b \neg A \to K_a K_b A$	[MP, 2, 13]
15.	$K_a K_b A$	[MP, 12, 14]
16.	$K_b A \to A$	[T]
17.	$K_a K_b A \to K_a A$	[R, 16]
18.	$K_a A$	[MP, 15, 17]

Aluksi käsitellään modaalilogiikoita, joissa on modaalioperaattori $\Box$ ja sen duaalioperaattori $\Diamond$ ($\neg\Box\neg$).

Modaalioperaattorit voidaan luonnolliselle kielelle tulkita monella eri tavalla:

	$\Box P$	$\Diamond P$
1.	välttämättä P	mahdollisesti P
2.	aina tulevaisuudessa P	
3.	aina menneisyydessä P	
4.	pitäisi olla P	
5.	tiedetään että P	
6.	uskotaan että P	

Modaalilogiikan syntaksi

Propositionaaliset modaalilauseet:

1. Atomilauseet ovat **lauseita**.
2. $\top$ ja $\bot$ ovat lauseita.
3. Jos P ja Q ovat lauseita, niin myös
   $\neg P$,
   $(P \to Q)$,
   $\Box P$
   ovat **lauseita**.
4. Muita **lauseita** ei ole.

Huom! Lyhennysmerkinnät:

$\Diamond P \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} \neg\Box\neg P$

$P \land Q \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} \neg(P \to \neg Q)$

$P \lor Q \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} \neg P \to Q$

$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} \neg((P \to Q) \to \neg(Q \to P))$

Jos lause Q saadaan lauseesta P korvaamalla P:n atomilauseet uusilla lauseilla järjestelmällisesti, sanotaan, että Q saadaan P:stä **sijoittamalla**.

Lauseita, jotka saadaan sijoittamalla lausekalkyylin pätevistä lauseista (tautologioista), sanotaan **klassiksi tautologioiksi**.

Esim. Lause

$$(\Box\Box P \to (R \to \Diamond S)) \to (\Box\Box P \to (R \to \Diamond S))$$

on klassinen tautologia, joka on saatu lausekalkyylin tautologiasta $P \to P$ korvaamalla P lauseella $(\Box\Box P \to (R \to \Diamond S))$

Logiikka = pätevien lauseiden joukko

Määritelmä. Propositionaalinen modaalilogiikka $\mathcal{L}$ on joukko propositionaalisia modaalilauseita siten, että

1. kaikki (klassiset) tautologiat kuuluvat joukkoon $\mathcal{L}$;
2. $\mathcal{L}$ on suljettu modus ponensin suhteen

   (jos $P \in \mathcal{L}$ ja $P \to Q \in \mathcal{L}$, niin $Q \in \mathcal{L}$) ;
3. $\mathcal{L}$ on suljettu sijoituksen suhteen

   ($P \in \mathcal{L}$ ja Q saadaan sijoittamalla lauseesta P, niin $Q \in \mathcal{L}$).

Esim.

(1) Klassiset tautologiat ovat modaalilogiikka.

(2) Kaikkien propositionaalisten modaalilauseiden joukko on modaalilogiikka.

Mahdollisten maailmojen semantiikka

Määritelmä. Kehys on pari $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$, missä S on ei-tyhjä joukko ja R on relaatio $R \subseteq S \times S$.

Joukon S alkiot ovat **mahdollisia maailmoja** ja R on maailmojen välinen saavutettavuusrelaatio: jos $s_1 R s_2$, niin s_2 on saavutettavissa s_1:stä.

Määritelmä. Valuaatio kehyksessä $\langle S, R \rangle$ on funktio v, joka kuvaa mahdolliset maailmat ja atomilauseet totuusarvoille (kaikille $s \in S$ ja atomilauseille P, $v(s, P)$ on joko true tai false).

Määritelmä. Malli on kolmikko $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, missä $\langle S, R \rangle$ on kehys ja v valuaatio tässä kehyksessä. $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ **perustuu** kehykseen $\langle S, R \rangle$. Sanomme, että s on mallin $\mathcal{M}$ mahdollinen maailma, jos $s \in S$.

Relaatio $\Vdash$, joka kertoo mitkä lauseet ovat tosia mallin $\mathcal{M}$ maailmoissa s, määritellään seuraavasti.

Määritelmä. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ malli. Relaatio $\Vdash$ on se (yksikäsitteinen) relaatio, jolle pätee:

1. $\mathcal{M}, s \Vdash P$ joss $v(s, P) = \mathrm{true}$, kun P on atomilause.
2. $\mathcal{M}, s \nVdash \bot$.
3. $\mathcal{M}, s \Vdash \top$.
4. $\mathcal{M}, s \Vdash \neg P$ joss $\mathcal{M}, s \nVdash P$.
5. $\mathcal{M}, s \Vdash P \rightarrow Q$ joss $\mathcal{M}, s \nVdash P$ tai $\mathcal{M}, s \Vdash Q$.
6. $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$ joss $\mathcal{M}, t \Vdash P$ kaikille $t \in S$ joille sRt.

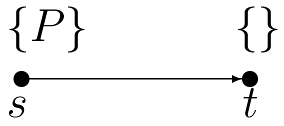
Huom! $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond P$ joss $\mathcal{M}, t \Vdash P$ jollekin $t \in S$ jolle sRt.

Toinen paljon käytetty merkintätapa: $\mathcal{M}, s \models P$

Esimerkki. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ missä

$S = \{s, t\}$
$R = \{\langle s, t\rangle\}$
$v(s, P) = \text{true}$,
$v(t, P) = \text{false}$

$\mathcal{M}$:



- $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P$.
- $\mathcal{M}, t \Vdash \Box P$.
- $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond\neg P$.
- $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P \rightarrow P$.
- $\mathcal{M}, t \nVdash \Box P \rightarrow P$.

Määritelmä.
- Lause P on **tosi** mallin $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ maailmassa s joss $\mathcal{M}, s \Vdash P$.
- Lause P on **pätevä** mallissa $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, joss P on tosi mallin jokaisessa maailmassa.
- Lause P on **pätevä** ei-tyhjässä mallien joukossa $\mathbf{C}$, joss P on pätevä jokaisessa $\mathbf{C}$:n mallissa.
- Lause P on **pätevä** ei-tyhjässä kehysten joukossa $\mathbf{F}$, joss P on pätevä $\mathbf{F}$:n kehyksiin perustuvien mallien joukossa.

Jos P on pätevä joukossa $\mathbf{C}$ ($\mathbf{F}$), sanomme että P on $\mathbf{C}$-pätevä ($\mathbf{F}$-pätevä).

Esimerkki. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle\}$ ja $v(s, P) = \text{true}$, $v(t, P) = \text{false}$.

- $\Box P \rightarrow P$ ei ole pätevä $\mathcal{M}$:ssä.

  $\mathcal{M}, t \nVdash \Box P \rightarrow P$.
- $P \vee \Box P$ on pätevä $\mathcal{M}$:ssä.
- $\Box\Box P$ on $\mathbf{F}$-pätevä, missä $\mathbf{F} = \{\langle S, R\rangle\}$.

Teoreema. Jos $\mathbf{C}$ on joukko malleja, $\mathbf{C}$-pätevien lauseiden joukko

1. sisältää kaikki tautologiat;
2. sisältää kaikki muotoa $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$ olevat lauseet;
3. sisältää lauseen Q aina, kun siihen kuuluvat P ja $P \to Q$;
4. sisältää lauseen $\Box P$ aina, kun siihen kuuluu P;

ja jos $\mathbf{F}$ on joukko kehyksiä, $\mathbf{F}$-pätevien lauseiden joukko on suljettu sijoituksen suhteen.

Seurauslause. Jos $\mathbf{L}$ on ei-tyhjä kehysten joukko, niin $\mathbf{L}$-pätevien lauseiden joukko on propositionaalinen modaalilogiikka.

Merkintää $\mathbf{L}$ voidaan käyttää kahdessa merkityksessä: (1) kehysjoukko ja (2) kehysjoukossa pätevien lauseiden joukko.

Määritelmä. Propositionaalista modaalilogiikkaa sanotaan normaaliksi, jos se

1. sisältää kaikki muotoa
   $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$
   olevat lauseet ja
2. sisältää lauseen $\Box P$ aina, kun siihen kuuluu P.

Määritelmä. Lausejoukkoa $\mathcal{L}$ sanotaan **kehyslogiikaksi**, jos $\mathcal{L}$ on $\mathbf{L}$-pätevien lauseiden joukko jollekin ei-tyhjälle kehysten joukolle $\mathbf{L}$.

Samaa merkintää $\mathbf{L}$ voidaan käyttää sekä logiikasta että vastaavasta kehysjoukosta.

Perustuloksia

- Kehys = malli predikaattikalkyylille, jossa on yksi kaksipaikkainen predikaattisymboli (R).
- Propositionaalisella modaalilogiikalla voidaan karakterisoida predikaattikalkyylin malleja.
- Propositionaalista modaalilogiikkaa voidaan käyttää kvantifioidun logiikan tilalla.
- Kuinka pitkälle modaalilogiikka riittää?

Esimerkki. $\Box P \to P$ on pätevä kehyksessä $\langle S, R\rangle$ joss R on refleksiivinen ($\forall x R(x,x)$ on tosi).

($\Leftarrow$) Olkoon R refleksiivinen. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ kehykseen $\langle S, R\rangle$ perustuva malli ja $s \in S$.

Jos $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$, $\mathcal{M}, s \Vdash P$, koska sRs. Täten $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P \to P$.

($\Rightarrow$) Oletetaan, että R ei ole refleksiivinen kehyksessä $\langle S, R\rangle$. Esim. ei ole niin, että $s_0 R s_0$.

Olkoon $v(s, P) = \mathrm{true}$ jos $s_0 R s$ muutoin $v(s, P) = \mathrm{false}$.

Nyt $v(s_0, P) = \mathrm{false}$.

Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$.

Tällöin $\mathcal{M}, s_0 \Vdash \Box P$ mutta $\mathcal{M}, s_0 \nVdash P$.

Siis $\mathcal{M}, s_0 \nVdash \Box P \to P$.

Määritelmä. Olkoon $\langle S, R\rangle$ kehys ja $S_0 \subseteq S$. S_0:n generoima alikehys on kehys $\langle S^*, R^*\rangle$, missä S^* on pienin R-suljettu S:n alijoukko, joka sisältää S_0:n ja R^* on R rajoitettuna joukolle S^*.

(S:n alijoukko H on R-suljettu, jos $t \in H$ aina kun $s \in H$ ja sRt).

Huom. S^* on niiden maailmojen joukko, jotka voidaan saavuttaa S_0:sta (transitiivisesti).

Määritelmä. Mallin $\langle S, R, v\rangle$ generoitu alimalli on malli $\langle S^*, R^*, v^*\rangle$, missä $\langle S^*, R^*\rangle$ on generoitu alikehys ja v^* on v rajoitettuna S^*:lle. Alikehys on generoitu, jos se on jonkun maailmojen joukon generoima.

Propositio. Jos $\mathcal{M}^*$ on $\mathcal{M}$:n generoitu alimalli, niin jokaisessa $\mathcal{M}^*$:n maailmassa s ja jokaiselle lauseelle P

$$\mathcal{M}, s \mid\mid\!\!- P \text{ joss } \mathcal{M}^*, s \mid\mid\!\!- P.$$

Esimerkki. Olkoon
$S = \{s, t_1, t_2\}$
$R = \{\langle t_1, t_2\rangle\}$.

Joukon $\{s\}$ generoima alikehys on
$S^* = \{s\}$
$R^* = \{\}$.

$\exists x \exists y R(x, y)$ on tosi kehyksessä $\langle S, R\rangle$.

$\exists x \exists y R(x, y)$ on epätosi kehyksessä $\langle S^*, R^*\rangle$.

Mutta kaikille lauseille P

$\langle S, R, v\rangle, s \mid\mid\!\!- P$ joss $\langle S^*, R^*, v^*\rangle, s \mid\mid\!\!- P$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ei ole lausetta P siten, että P on pätevä kehyksessä $\langle S, R\rangle$ joss R:lle pätee $\exists x \exists y R(x, y)$.

Kehyksien pistevieras unioni:
muodostetaan 'kopiot' kehyksistä niin, etteivät maailmojen joukot leikkaa ja sitten otetaan unioni maailmoista ja saavutettavuusrelaatioista.

Propositio. Lause P on pätevä kahden kehyksen pistevieraassa unionissa joss P on pätevä kummassakin kehyksessä.

Määritelmä. Kuvaus f kehykseltä $\langle S_1, R_1\rangle$ kehykselle $\langle S_2, R_2\rangle$ on p-morfismi joss

1. f on kuvaus joukolta S_1 joukolle S_2 s.e. jokaiselle $s \in S_2$ olemassa $t \in S_1$, jolle $s = f(t)$.
2. kaikille $s, t \in S_1$, jos sR_1t, niin $f(s)R_2f(t)$ ja
3. kaikille $s \in S_1$ ja $t \in S_2$, jos $f(s)R_2t$, niin on olemassa $u \in S_1$ siten, että sR_1u ja $f(u) = t$.

Esimerkki. Olkoon $S_1 = \{s_1, s_2\}$; $R_1 = \{\langle s_1, s_2\rangle, \langle s_2, s_1\rangle\}$ ja $S_2 = \{t\}$; $R_2 = \{\langle t, t\rangle\}$.
Olkoon $f(s_1) = f(s_2) = t$.
Funktio f on p-morfismi.

Propositio. Jos on olemassa p-morfismi kehykseltä $\langle S_1, R_1\rangle$ kehykselle $\langle S_2, R_2\rangle$, niin jokainen ensimmäisessä kehyksessä pätevä lause on pätevä myös toisessa kehyksessä.

Esimerkki. (Jatkuu)

$\forall x \neg R(x, x)$ on tosi kehyksessä $\langle S_1, R_1\rangle$.

$\forall x \neg R(x, x)$ on epätosi kehyksessä $\langle S_2, R_2\rangle$.

Kuitenkin jokaiselle lauseelle P

jos P on pätevä kehyksessä $\langle S_1, R_1\rangle$, niin P on pätevä kehyksessä $\langle S_2, R_2\rangle$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ei ole lausetta P siten, että P on pätevä kehyksessä $\langle S, R\rangle$ joss R:lle pätee $\forall x \neg R(x, x)$.

Looginen seuraavuus

$\Sigma \models P$

- Lausekalkyyli:

  P on tosi jokaisessa mallissa, jossa Σ on tosi.

- Modaalilogiikka:

  — Kaikille malleille pätee, että P on tosi jokaisessa mallin maailmassa, jossa Σ on tosi.

  — P on pätevä jokaisessa mallissa, jossa Σ on pätevä.

  — P on pätevä jokaisessa kehyksessä, jossa Σ on pätevä.

Määritelmä. Olkoon $\mathbf{L}$ joukko kehyksiä, Σ ja Υ lausejoukkoja ja P lause.

$\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$

joss jokaiselle kehykselle $\langle S, R\rangle \in \mathbf{L}$, jokaiselle tähän kehykseen perustuvalle mallille $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, jossa kaikki Σ:n lauseet ovat päteviä, jokaiselle mahdolliselle maailmalle $s \in S$, jossa kaikki Υ:n lauseet ovat tosia, $\mathcal{M}, s \Vdash P$.

L: kehyslogiikka

Σ: globaalit premissit ('loogiset totuudet')

Υ: lokaalit premissit ('oletetut totuudet')

Esimerkki. Olkoon $\mathbf{L}$ kaikkien kehysten joukko.

Jos $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \emptyset \Longrightarrow P$, niin $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \emptyset \Longrightarrow \Box P$.

$\{P\} \models_{\mathbf{L}} \emptyset \Longrightarrow \Box P$

Mutta $\emptyset \not\models_{\mathbf{L}} \{P\} \Longrightarrow \Box P$.

Määritelmä. Jos $\mathbf{L}_1$ ja $\mathbf{L}_2$ ovat kaksi kehysjoukkoa ja $\mathbf{L}_2 \subseteq \mathbf{L}_1$, sanomme, että $\mathbf{L}_1$ on heikompi kuin $\mathbf{L}_2$ ja kirjoitamme $\mathbf{L}_1 \leq \mathbf{L}_2$.

Jos $\mathbf{L}_1$ on heikompi kuin $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1$-pätevät lauseet ovat $\mathbf{L}_2$-päteviä.

Teoreema. (Monotonisuus) Jos $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, $\Upsilon_1 \subseteq \Upsilon_2$ ja $\mathbf{L}_1 \leq \mathbf{L}_2$, niin $\Sigma_2 \models_{\mathbf{L}_2} \Upsilon_2 \Longrightarrow P$, jos $\Sigma_1 \models_{\mathbf{L}_1} \Upsilon_1 \Longrightarrow P$.

Teoreema. (Korvattavuus) Olkoon Q ja Q' samat lauseet paitsi, että jossain paikoissa, joissa P on Q:n alilause, P' on Q':n alilause. Tällöin

$\Sigma \cup \{P \leftrightarrow P'\} \models_{\mathbf{L}} \emptyset \Longrightarrow Q \leftrightarrow Q'$.

Deduktioteoreema

Lausekalkyyli: $\Sigma \cup \{Q\} \models P$ joss $\Sigma \models Q \rightarrow P$.

Teoreema. (Paikallinen deduktioteoreema) $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{Q\} \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow Q \rightarrow P$.

Määritelmä. Lauseelle P, $\Box^0 P = P$ ja $\Box^n P = \Box(\Box^{n-1} P)$.

Esim. $\Box^3 P = \Box\Box\Box P$.

Globaali deduktioteoreema:

$\Sigma \cup \{Q\} \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss jollekin n
$\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \ldots, \Box^n Q\} \Longrightarrow P$.

(Ei päde kaikille kehysjoukoille $\mathbf{L}$.)

Teoreema. (Globaali deduktioteoreema I)
Jos, jollekin n,
$\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \ldots, \Box^n Q\} \Longrightarrow P$, niin
$\Sigma \cup \{Q\} \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Teoreema. (Globaali deduktioteoreema II)
Olkoon $\mathbf{L}$ joukko kehyksiä, joka on suljettu generoitujen alikehysten ja ultraproduktien suhteen.
Tällöin jos $\Sigma \cup \{Q\} \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$, niin
$\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \ldots, \Box^n Q\} \Longrightarrow P$
jollekin n.

Teoreema. (Kompaktius) Olkoon $\mathbf{L}$ joukko kehyksiä, joka on suljettu ultraproduktien suhteen.

Jos $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$, niin on olemassa äärelliset joukot $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon_0 \subseteq \Upsilon$ siten, että
$\Sigma_0 \models_{\mathbf{L}} \Upsilon_0 \Longrightarrow P$.