Tik-79.146 **Kevät 1999/IN**

Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I

Tentti 12.5.1999

1. a) Olkoon $\mathbf{L}$ kehysjoukko, johon kuuluu yksi kehys $\langle S, R\rangle$, missä $S = \{a\}$, $R = \{\langle a, a\rangle\}$. Päteekö $\{P \leftrightarrow Q\} \models_{\mathbf{L}} \{P\} \Longrightarrow \Box P \land \Box Q$? Perustele vastauksesi lyhyesti.

b) Olkoon $\mathbf{L}$ ja $\mathbf{L}'$ kaksi kehysjoukko, joille $\mathbf{L} \subset \mathbf{L}'$. Päteekö mille tahansa lausejoukoille Σ ja Υ ja lauseelle P: jos $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$, niin $\Sigma \models_{\mathbf{L}'} \Upsilon \Longrightarrow P$? Perustele vastauksesi lyhyesti.

c) Anna LTL-malli, jossa LTL-lause $\neg(P\mathbf{U}(\neg Q))$ on toteutuva muttei pätevä (P ja Q ovat atomilauseita).

2. Tutki taulumenetelmällä, pitääkö annettu väite paikkansa. Jos väite ei pidä paikkansa, anna vastamalli.

a) $\{\} \models_{\mathbf{K4}} \{\} \Longrightarrow \neg\Diamond P \to \Box(\Box P \lor \neg\Diamond P)$

b) $\{\} \models_{\mathbf{T}} \{\} \Longrightarrow \Box(P \to \Box(Q \to R)) \to \Diamond(Q \to (\Box P \to \Diamond R))$

c) $\{\Box P \to \Box\Box P\} \models_{\mathbf{K}} \{\} \Longrightarrow \Box\neg\Box\Box P \lor \Box\Box\Box P$

P ja Q ovat atomilauseita.

3. a) Anna lauseelle $\Box P \to \Box\neg\neg P$ Hilbert-tyylinen $\mathbf{K}$-todistus.

b) Määrittele, milloin Hilbert-tyylinen todistusteoria on soundi ja täydellinen annetulle modaalilogiikalle $\mathbf{L}$.

c) Osoita, että Hilbert-tyylinen todistusteoria, jossa aksioomina ovat kaikki klassiset tautologiat ja kaikki muotoa $\Box(\Box P \to P) \to \Box P$ olevat lauseet ja päättelysääntöinä Modus Ponens ja välttämättömyys-sääntö (N-sääntö), ei ole soundi modaalilogiikalle $\mathbf{K}$.

4. a) CTL:n syntaksi voidaan määritellä käyttäen vain perusoperaattoreita $\land$, $\neg$, $\mathbf{AX}$, $\mathbf{A}(\cdot\mathbf{U}\cdot)$, $\mathbf{E}(\cdot\mathbf{U}\cdot)$. Esimerkiksi operaattorit $\mathbf{EF}$, $\mathbf{EG}$ voidaan nähdä lyhennysmerkintöinä ko. perusoperaattoreista. Anna lyhennysmerkintöjä $\mathbf{EF}P$ ja $\mathbf{EG}P$ vastaavat lauseet käyttäen ainoastaan perusoperaattoreita, missä P on atomilause.

b) Anna mahdollisten maailmojen malli, jossa CTL-lause $\mathbf{AG}(\mathbf{E}(Q\mathbf{U}P))$ on pätevä mutta LTL-lause $\mathbf{G}(Q\mathbf{U}P)$ ei ole (P on atomilause).

c) Tutki, onko CTL-lause

$$\mathbf{AG}(P \to Q) \to (\mathbf{EX}P \to \mathbf{EX}Q)$$

on pätevä taulumenetelmällä

Tehtävissä käytettyjä merkintöjä:

$\mathbf{K}$: kaikkien kehysten joukko

$\mathbf{T}$: kaikkien refleksiivisten kehysten joukko

$\mathbf{K4}$: kaikkien transitiivisten kehysten joukko

Relaation R ominaisuuksia:	Refleksiivisyys:	$\forall s(sRs)$
	Transitiivisuus:	$\forall s\forall t\forall u(sRt \land tRu \to sRu)$