Tik-79.146 **Kevät 1998**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 7
Ratkaisut

Aksioomat ja päättelysäännöt:

$$\begin{aligned}
\text{K:}&\quad \Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)\\
\text{T:}&\quad \Box P \to P\\
\text{D:}&\quad \Box P \to \Diamond P \quad \text{tai} \quad \Box P \to \neg\Box\neg P\\
\text{4:}&\quad \Box P \to \Box\Box P\\
\text{5:}&\quad \neg\Box P \to \Box\neg\Box P\\
\text{MP:}&\quad \frac{P,\ P \to Q}{Q}\\
\text{N:}&\quad \frac{P}{\Box P}
\end{aligned}$$

1.

1.	$\neg\Box P \to \Box\neg\Box P$	[5]
2.	$(\neg\Box P \to \Box\neg\Box P) \to (\neg\Box\neg\Box P \to \Box P)$	[Taut]
3.	$\neg\Box\neg\Box P \to \Box P$	[MP, 1,2]
4.	$\Box\Box P$	[GP]
5.	$\Box\Box P \to \neg\Box\neg\Box P$	[D]
6.	$\neg\Box\neg\Box P$	[MP, 4,5]
7.	$\Box P$	[MP, 6,3]

2. a) Huomataan että

$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge A \wedge B \wedge \neg(A \wedge B)\big),$$
$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge \neg A \wedge (A \wedge B)\big)$$

ja

$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge \neg B \wedge (A \wedge B)\big)$$

koska ne ovat tautologioita. Koska Δ on Σ-maksimaalinen, tämä implikoi että $A \wedge B \notin \Delta$, $A \in \Delta$ ja $B \in \Delta$ ei ole mahdollista, eikä $A \wedge B \in \Delta$ ja $A \notin \Delta$, eikä $A \wedge B \in \Delta$ ja $B \notin \Delta$. Siis, $A \wedge B \in \Delta$ joss $A \in \Delta$ ja $B \in \Delta$.

b) Samasta syystä

$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge \neg A \wedge \neg(A \to B)\big),$$
$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge B \wedge \neg(A \to B)\big),$$

ja

$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge A \wedge \neg B \wedge (A \to B)\big)$$

eli $A \to B \in \Delta$ joss $A \notin \Delta$ tai $B \in \Delta$.

c) Vastaavasti

$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge A \wedge \neg(A \vee B)\big),$$
$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge B \wedge \neg(A \vee B)\big),$$

ja

$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge (A \vee B)\big)$$

ja $A \vee B \in \Delta$ joss $A \in \Delta$ tai $B \in \Delta$.

3. **S4** on **KT4**.

1.	$\neg\bot$	[Taut]
2.	$\Box\bot \to \bot$	[T]
3.	$(\Box\bot \to \bot) \to (\neg\bot \to \neg\Box\bot)$	[Taut]
4.	$\neg\bot \to \neg\Box\bot$	[MP, 2, 3]
5.	$\neg\Box\bot$	[MP, 1, 4]