Tik-79.146 **Kevät 1998**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 5
Ratkaisut

1. a) Oletetaan että $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$ on euklidinen. Olkoon $M = \langle S, R, v\rangle$ siten että $M, s \Vdash \neg\Box P$. Silloin

$$M, s \nVdash \Box P$$

ja

$$\exists t : \langle s, t\rangle \in R \quad M, t \nVdash P$$

Oletetaan että $\langle s, u\rangle \in R$. Koska $\langle s, t\rangle \in R$, euklidisuudesta saadaan $\langle u, t\rangle \in R$. Siis

$$M, u \nVdash \Box P$$

ja

$$M, u \Vdash \neg\Box P$$

Koska u on mielivaltainen, $M, s \Vdash \Box\neg\Box P$ ja on todistettu

$$M, s \Vdash \neg\Box P \to \Box\neg\Box P$$

Täten,

$$M \models \neg\Box P \to \Box\neg\Box P$$

Koska M on mielivaltainen,

$$\mathcal{F} \models \neg\Box P \to \Box\neg\Box P$$

b) Oletetaan $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$,

$$\mathcal{F} \models \Box P \to \Diamond P$$

Olkoon $M = \langle S, R, v\rangle$. Jos

$$M, s \nVdash \Box P$$

niin

$$\exists t : M, t \not\Vdash P \quad \text{ja} \quad \langle s, t \rangle \in R$$

Toisaalta, jos

$$M, s \Vdash \Box P$$

niin

$$M, s \Vdash \Diamond P$$

ja

$$\exists t : \langle s, t \rangle \in R \quad \text{ja} \quad M, t \Vdash P$$

Siis $\mathcal{F}$ on sarjallinen.

c) Olkoon $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$ transitiivinen kehys. Olkoon $M = \langle S, R, v \rangle$. Jos

$$M, s \Vdash \Box P$$

niin

$$M, t \Vdash P$$

kaikilla t siten että $\langle s, t \rangle \in R$. Olkoon $u \in S$ ja $\langle s, u \rangle \in R$. Jos

$$\langle u, v \rangle \in R$$

niin

$$\langle s, v \rangle \in R$$

transitiivisuuden perusteella. Nyt $M, v \Vdash P$ implikoi $M, u \Vdash \Box P$ ja

$$M, s \Vdash \Box\Box P$$

Täten

$$\mathcal{F} \models \Box P \to \Box\Box P$$

2. Oletetaan että $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$ on refleksiivinen ja euklidinen. Jos sRt niin myös sRs refleksiivisyydestä. Euklidisuudesta seuraa tRs eli symmetrisyys. Oletetaan sRt ja tRu. Symmetrisyydestä saadaan tRs ja euklidisuudesta sRu. Näin transitiivisuus on todistettu.

3. **KD45** = sarjalliset, transitiiviset ja euklidiset kehykset. Todistetaan **KD45** $\not\models \neg(\neg P \wedge \Box\Box P)$ konstruoimalla

$$M = \langle S, R, v \rangle$$

siten että

$$M, s \nVdash \neg(\neg P \wedge \Box\Box P)$$

Silloin

$$M, s \Vdash \neg P \wedge \Box\Box P$$

eli

$$M, s \Vdash \neg P \quad \text{ja} \quad M, s \Vdash \Box\Box P$$

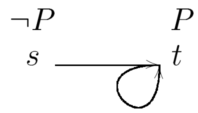
Sarjallisuus implikoi $\exists t : sRt$. Siksi

$$M, t \Vdash \Box P$$

Euklidisuus implikoi tRt ja todetaan

$$M, t \Vdash P$$

Näin M:



toteuttaa

$$M, s \nVdash \neg(\neg P \wedge \Box\Box P)$$

Huomataan että M on sarjallinen, transitiivinen ja euklidinen.