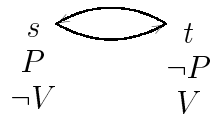
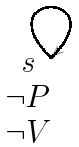
Tik-79.146 **Kevät 1998**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 11
Ratkaisut

1. a) $M = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle, \langle t, s\rangle\}$ ja $v(s, P) = v(s, V) =$ **false** ja $v(t, P) = v(t, V) =$ **true**.

   b) $M = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle, \langle t, s\rangle\}$ ja $v(t, P) = v(s, V) =$ **false** ja $v(s, P) = v(t, V) =$ **true**.



   c) $M = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s\}$, $R = \{\langle s, s\rangle\}$ ja $v(s, P) = v(s, V) =$ **false**.



2. Oletetaan että $M, s \nVdash \varphi$ ja että $M = \langle S, R, v\rangle$ on universaali. Olkoon

$$F = \{\Box\psi \mid \Box\psi \text{ on } \varphi\text{:n alikaava ja } M, s \Vdash \neg\Box\psi\}.$$

   Silloin jokaiselle $\Box\psi \in F$ vastaa tila s_ψ siten että

$$M, s_\psi \Vdash \neg\psi$$

   Olkoon $M' = \langle S', R', v\rangle$, missä

$$S' = \{s\} \cup \{s_\psi \mid \Box\psi \in F\}$$

   ja $R' = S' \times S'$. Koska $|F| < |\mathrm{Sub}(\varphi)| \leq |\varphi|$, myös $|S'| \leq |\varphi|$.

   Näytetään induktiolla että jokaisella $s' \in S'$ ja jokaisella φ:n alikaavalla ψ pätee

$$M, s' \Vdash \psi \quad \text{joss} \quad M', s' \Vdash \psi.$$

Perustapaus, alikaava on propositio, on triviaali. Myös alikaavojen muotoa $\psi' \wedge \psi''$ ja $\neg\psi$ induktioaskeleet seuraavat heti. Olkoon sitten alikaava muotoa $\Box\psi$. Otetaan $s' \in S'$.

Jos $M, s' \Vdash \Box\psi$ niin $M, t \Vdash \psi$ kaikilla $t \in S$. Erityisesti, $M, t \Vdash \psi$ kaikilla $t \in S'$. Induktiohypoteesi antaa nyt $M', t \Vdash \psi$ kaikilla $t \in S'$, josta seuraa $M', s' \Vdash \Box\psi$.

Toisaalta, jos $M, s' \nVdash \Box\psi$ niin $M, t \Vdash \neg\Box\psi$ kaikilla $t \in S$ koska M on universaali. Etenkin, $M, s \Vdash \neg\Box\psi$ ja siksi $\Box\psi \in F$. Täten $M, s_\psi \Vdash \neg\psi$ ja $M, s_\psi \nVdash \psi$ josta saadaan induktiohypoteesilla $M', s_\psi \nVdash \psi$, joten $M', s_\psi \Vdash \neg\psi$. Eli $M', s' \nVdash \Box\psi$.

Jos φ ei ole **S5**-pätevä löytyy vastamalli M ja tila s siten että $M, s \nVdash \varphi$. Yllä olevasta saadaan sitten toisen vastamallin M' jossa on korkeintaan $|\varphi|$ tilaa.

3. Konstruoidaan kaava φ_m siten että φ_m pätee **S4**-mallissa vain jos **S4**-mallissa on täydellinen binääri puu jonka syvyys on m. Määritellään apukaavat

$$depth = \bigwedge_{i=1}^{m+1} (d_i \to d_{i-1})$$

$$determined = \bigwedge_{i=1}^{m} \Big(d_i \to \big(p_i \to \Box(d_i \to p_i)\big) \wedge \big(\neg p_i \to \Box(d_i \to \neg p_i)\big)\Big)$$

$$branching = \bigwedge_{i=0}^{m-1} \big((d_i \wedge \neg d_{i+1}) \to \neg\Box\neg(d_{i+1} \wedge \neg d_{i+2} \wedge p_{i+1}) \wedge \neg\Box\neg(d_{i+1} \wedge \neg d_{i+2} \wedge \neg p_{i+1})\big)$$

Idea on seuraava. Kaava *depth* implikoi että d_i on totta jos syvyys on vähintään i. Kaava *determined* sanoo että jos p_i on tosi tai epätosi syvyydellä i niin se on edelleen tosi tai epätosi tästä syvemmälle. Kaava *branching* takaa että jos ollaan syvyydellä i niin löytyy kaksi tilaa syvyydellä $i+1$ siten että toisessa p_{i+1} on tosi ja toisessa p_{i+1} on epätosi. Tästä sitten seuraa että syvyydellä m löytyy yhtä monta tilaa kun on totuusjakeluja $p_1, \ldots, p_m$:n yli, eli 2^m. Nyt

$$\varphi_m = d_0 \wedge \neg d_1 \wedge \Box(depth \wedge determined \wedge branching).$$

Kaavan φ pituus on luokkaa $O(m)$.

Induktiotodistus. Oletetaan että $M, s \Vdash \varphi_m$, $M = \langle S, R, v\rangle$. Perustapaus: koska

$$M, s \Vdash d_0 \wedge \neg d_1 \wedge branching,$$

löytyy kaksi tilaa t_1, t_2 siten että

$$M, t_1 \Vdash d_1 \wedge \neg d_2 \wedge p_1 \quad \text{ja} \quad M, t_2 \Vdash d_1 \wedge \neg d_2 \wedge \neg p_1.$$

Induktiohypoteesi: jokaiselle totuusjakelulle v:lle $p_1, \ldots, p_j$:n yli löytyy tila t siten että sRt, $M, t \Vdash d_j \wedge \neg d_{j+1}$ ja kaikilla $i = 1, \ldots, j$ $v(p_i) =$ **true** joss $M, t \Vdash p_i$.

Induktioaskel: oletetan että v on totuusjakelu $p_1, \ldots, p_{j+1}$:n yli. Induktiohypoteesin mukaan löytyy tila t siten että $M, t \Vdash d_j \wedge \neg d_{j+1}$ ja kaikilla $i = 1, \ldots, j$, $v(p_i) =$ **true** joss $M, t \Vdash p_i$. Koska sRt meillä on myös $M, t \Vdash \mathit{depth} \wedge \mathit{determined} \wedge \mathit{branching}$. Kaava *branching* takaa että löytyy kaksi tilaa t_1, t_2 siten että

$$M, t_1 \Vdash d_{j+1} \wedge \neg d_{j+2} \wedge p_{j+1} \quad \text{ja} \quad M, t_2 \Vdash d_{j+1} \wedge \neg d_{j+2} \wedge \neg p_{j+1},$$

kaava *depth* takaa että

$$M, t_{1,2} \Vdash d_1 \wedge \cdots \wedge d_j$$

ja kaava *determined* takaa että kaikilla $i = 1, \ldots, j$

$$M, t_{1,2} \Vdash p_i \quad \text{joss} \quad v(p_i) = \textbf{true}.$$

Huomataan että täydellisen binäärisen puun refleksiivinen ja transitiivinen sulkeuma muodostaa kehys **S4**:ssä. Täten, löytyy **S4**-malli ja tila missä φ_m on tosi.

Etsimämme kaava on sitten $\neg\varphi_m$ koska sen vastamallissa on tila missä φ_m on totta ja siksi malli sisältää ainakin 2^m tilaa.