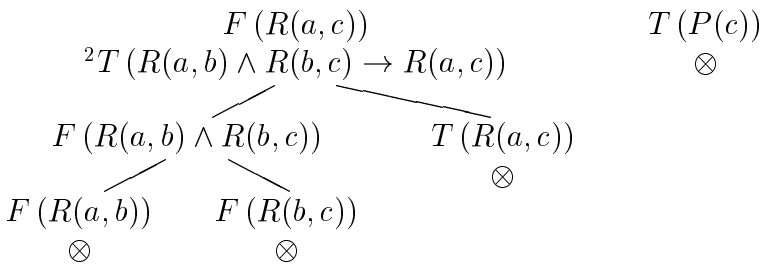
Tik-79.146 **Kevät 1998**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 10
Ratkaisut

1. **S4** on refleksiivisten ja transitiivisten kehysten joukko. Lause käännetään predikaattikalkyylimuotoon:

$$\begin{aligned}
\tau(\neg\Box\Box P \to \neg\Box P, x) &= \neg\tau(\Box\Box P, x) \to \neg\tau(\Box P, x) \\
&= \neg\forall y\big(R(x,y) \to \tau(\Box P, y)\big) \\
&\quad \to \neg\forall y\big(R(x,y) \to \tau(P, y)\big) \\
&= \neg\forall y\Big(R(x,y) \to \forall x\big(R(y,x) \to \tau(P, x)\big)\Big) \\
&\quad \to \neg\forall y\big(R(x,y) \to P(y)\big) \\
&= \neg\forall y\Big(R(x,y) \to \forall x\big(R(y,x) \to P(x)\big)\Big) \\
&\quad \to \neg\forall y\big(R(x,y) \to P(y)\big) \\
&= \varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
T\,(\forall x R(x,x)) \\
{}^{2}T\,(\forall x\forall y\forall z R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)) \\
F\,(\forall x\varphi) \\
F\,\Big(\neg\forall y\Big(R(a,y) \to \forall x\big(R(y,x) \to P(x)\big)\Big) \to \neg\forall y\big(R(a,y) \to P(y)\big)\Big) \\
T\,\Big(\neg\forall y\Big(R(a,y) \to \forall x\big(R(y,x) \to P(x)\big)\Big)\Big) \\
F\,\big(\neg\forall y\big(R(a,y) \to P(y)\big)\big) \\
F\,\Big(\forall y\Big(R(a,y) \to \forall x\big(R(y,x) \to P(x)\big)\Big)\Big) \\
{}^{1}T\,\big(\forall y\big(R(a,y) \to P(y)\big)\big) \\
F\,\big(R(a,b) \to \forall x\big(R(b,x) \to P(x)\big)\big) \\
T\,(R(a,b)) \\
F\,\big(\forall x\big(R(b,x) \to P(x)\big)\big) \\
F\,(R(b,c) \to P(c)) \\
T\,(R(b,c)) \\
F\,(P(c)) \\
{}^{1}T\,(R(a,c) \to P(c))
\end{gathered}$$



2. Kehys $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$, $|S| = n$ ja $R \subseteq S \times S$ implikoi että kehysten määrä on

$$|\mathcal{P}(S \times S)| = 2^{n^2}$$

Joten $n = 10$ antaa $2^{100} \approx 1.3 \cdot 10^{30}$ kehystä.

Toisaalta, kaksi kehystä voidaan pitää samoina jos ne graafeina ovat isomorfiset. Silloin, kehysten määrä on

12005168

Tähän tulokseen päästään Polya'n enumeraatio-teorian avulla.

3. a) $M, s_1 \Vdash K_1P$ koska $v(s_1, P) = v(s_2, P) = \mathbf{true}$,
$M, s_1 \Vdash K_2P$ ja $M, s_1 \Vdash K_3P$ koska $v(s_1, P) = \mathbf{true}$. Siis,
$M, s_1 \Vdash EP$.

   b) $M, s_1 \Vdash K_2EP$ ja $M, s_1 \Vdash K_3EP$ koska $M, s_1 \Vdash EP$. Lisäksi
$M, s_2 \Vdash K_1P$ koska $v(s_1, P) = v(s_2, P) = \mathbf{true}$,
$M, s_2 \Vdash K_2P$ koska $v(s_2, P) = v(s_3, P) = \mathbf{true}$ ja
$M, s_2 \Vdash K_3P$ koska $v(s_2, P) = \mathbf{true}$. Täten
$M, s_2 \Vdash EP$ josta seuraa
$M, s_1 \Vdash K_1EP$. Joten
$M, s_1 \Vdash EEP$.

   Toisaalta, tulos saadaan myös jos huomataan että P on tosi kaikissa maailmoissa, jotka ovat saavutettavissa s_1:ltä kahdella askelella.

   c) $M, s_1 \nVdash CP$ koska s_4 on C-saavutettava s_1:ltä ja $v(s_4, P) = \mathbf{false}$.