Taulumenetelmä CTL:lle

CTL:n taulu on bipartiitti graafi, jossa on solmut ovat lausejoukkoja ja niitä on kahdentyyppisiä: OR-solmuja ja AND-solmuja.

Lauseelle P taulu rakennetaan muuntamalla P ensin **positiiviseen normaalimuotoon** ja etenemällä sitten kahdessa vaiheessa:

(i) rakennetaan alustava taulu T_0 ja

(ii) muodostetaan lopullinen taulu T_1 karsintasäännöillä taulusta T_0.

CTL-lause muunnetaan **positiiviseen normaalimuotoon** seuraavilla säännöillä:

$$
\begin{array}{lcl}
P \to Q & \mapsto & \neg P \vee Q \\
\neg(P \vee Q) & \mapsto & \neg P \wedge \neg Q \\
\neg(P \wedge Q) & \mapsto & \neg P \vee \neg Q \\
\neg\neg P & \mapsto & P \\
\neg \mathbf{AG} P & \mapsto & \mathbf{EF} \neg P \\
\neg \mathbf{EF} P & \mapsto & \mathbf{AG} \neg P \\
\neg \mathbf{EG} P & \mapsto & \mathbf{AF} \neg P \\
\neg \mathbf{AF} P & \mapsto & \mathbf{EG} \neg P \\
\neg \mathbf{AX} P & \mapsto & \mathbf{EX} \neg P \\
\neg \mathbf{EX} P & \mapsto & \mathbf{AX} \neg P \\
\neg \mathbf{A}(P \mathbf{U} Q) & \mapsto & \mathbf{E}(\neg P \mathbf{B} Q) \\
\neg \mathbf{E}(P \mathbf{U} Q) & \mapsto & \mathbf{A}(\neg P \mathbf{B} Q) \\
\neg \mathbf{A}(P \mathbf{B} Q) & \mapsto & \mathbf{E}(\neg P \mathbf{U} Q) \\
\neg \mathbf{E}(P \mathbf{B} Q) & \mapsto & \mathbf{A}(\neg P \mathbf{U} Q)
\end{array}
$$

- Huom! Lyhennysmerkinnät:

  $\mathbf{A}(P\mathbf{B}Q)$: $\neg\mathbf{E}((\neg P)\mathbf{U}Q)$
  $\mathbf{E}(P\mathbf{B}Q)$: $\neg\mathbf{A}((\neg P)\mathbf{U}Q)$

- Positiivisessa normaalimuodossa negaatioita esiintyy vain atomilauseiden edessä.

- Merkintä $\sim P$: lauseen $\neg P$ positiivinen normaalimuoto.

  Esimerkki.

  $\sim\mathbf{AG}(R \to (\neg Q \wedge \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q))) =$
  $\mathbf{EF}(R \wedge (Q \vee \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)))$

Alustavan taulun T_0 muodostaminen:

- Aloitetaan OR-solmusta $D_0 = \{P\}$.

- OR-solmun D seuraajat ovat AND-solmuja, jotka saadaan soveltamalla α/β-sääntöjä solmuun D.

- AND-solmun C seuraajat ovat OR-solmuja, jotka saadaan seuraajasäännöllä solmusta C.

Huom! Jos OR-solmun D seuraaja C esiintyy jo taulussa, ei tauluun tule toista kopiota, vaan D:n seuraajaksi tulee jo olemassa oleva solmu C.
Samoin AND-solmuille.

OR-solmun D seuraajat ovat D:sta seuraavilla α- ja β-säännöillä saatavat alaspäin suljetut joukot.

Joukko C on alaspäin suljettu, kun seuraavat kaksi ehtoa toteutuvat:
(i) Jos $\alpha \in C$, $\alpha_1 \in C$ ja $\alpha_2 \in C$.
(ii) Jos $\beta \in C$, $\beta_1 \in C$ tai $\beta_2 \in C$.

α-säännöt:

$$\frac{P \wedge Q}{\begin{array}{c}P\\ Q\end{array}} \qquad \frac{\mathbf{AG}P}{\begin{array}{c}P\\ \mathbf{AXAG}P\end{array}} \qquad \frac{\mathbf{EG}P}{\begin{array}{c}P\\ \mathbf{EXEG}P\end{array}}$$

$$\frac{\mathbf{A}(P\mathbf{B}Q)}{\begin{array}{c}\sim Q\\ P \vee \mathbf{AXA}(P\mathbf{B}Q)\end{array}} \qquad \frac{\mathbf{E}(P\mathbf{B}Q)}{\begin{array}{c}\sim Q\\ P \vee \mathbf{EXE}(P\mathbf{B}Q)\end{array}}$$

β-säännöt:

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q} \qquad \frac{\mathbf{AF}P}{P \mid \mathbf{AXAF}P} \qquad \frac{\mathbf{EF}P}{P \mid \mathbf{EXEF}P}$$

$$\frac{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)}{Q \mid P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)} \qquad \frac{\mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)}{Q \mid P \wedge \mathbf{EXE}(P\mathbf{U}Q)}$$

Huom! Literaaleille sekä $\mathbf{AX}P$ ja $\mathbf{EX}P$ lauseille ei sääntöjä.

Esimerkki.

Olkoon $D = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R)\}$

D:sta saatava alaspäin suljetut joukot ovat

$C_1 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R)$,
$\mathbf{EF}((P \wedge Q) \vee R)$,
$(P \wedge Q) \vee R, P \wedge Q, P, Q\}$

$C_2 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R)$,
$\mathbf{EF}((P \wedge Q) \vee R)$,
$(P \wedge Q) \vee R, R\}$

$C_3 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R)$,
$\mathbf{EF}((P \wedge Q) \vee R)$,
$\mathbf{EXEF}((P \wedge Q) \vee R)\}$

$C_4 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R)$,
$\mathbf{AXAFEF}((P \wedge Q) \vee R)\}$

AND-joukon C seuraajat saadaan seuraajasäännöllä:

Olkoon joukossa C seuraavatilalauseet:

$\mathbf{AX}P_1, \ldots, \mathbf{AX}P_l,$
$\mathbf{EX}Q_1, \ldots, \mathbf{EX}Q_k.$

Tällöin C:llä on seuraajat:

$D_1 = \{P_1, \ldots, P_l, Q_1\} \ldots$
$D_k = \{P_1, \ldots, P_l, Q_k\}$

Esimerkki. Olkoon
$C = \{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q),$
$\mathbf{EG}P, P, \mathbf{EXEG}P,$
$\mathbf{EF}Q, \mathbf{EXEF}Q\}.$

Tällöin C:n seuraajat ovat
$D_1 = \{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{EG}P\}$ ja
$D_2 = \{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{EF}Q\}.$

Alustavasta taulusta T_0 saadaan lopullinen taulu suorittamalla karsintaa seuraavilla säännöillä, kunnes mitään niistä ei voida soveltaa.

- Poistetaan AND-solmu, joka sisältää lauseen ja sen negaation.
- Poistetaan AND-solmu, jos yksikin sen alkuperäisistä seuraajista on poistettu.
- Poistetaan OR-solmu, jos kaikki sen alkuperäisistä seuraajista on poistettu.
- Poistetaan AND-solmu, jos jokin sen tulevaisuuslause ei toteudu tämän hetkisessä taulussa.

Tulevaisuuslauseita ovat seuraavaa muotoa olevat lauseet:

$\mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)$
$\mathbf{EF}Q$
$\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$
$\mathbf{AF}Q$

Tulevaisuuslauseiden toteutuminen taulussa määritellään seuraavasti:

- Tulevaisuuslause $\mathbf{EF}Q$ ($\mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)$) toteutuu AND-solmussa C, joss taulusta löytyy solmusta C lähtevä polku AND-solmuun C', joka sisältää lauseen Q (ja polun kaikissa muissa AND-solmuissa on lause P).
- Tulevaisuuslause $\mathbf{AF}Q$ ($\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$) toteutuu AND-solmussa C, joss taulusta löytyy asyklinen aligraafi, jolle pätee:
  (i) Aligraafin juuri on solmu C.
  (ii) Kullekin OR-sisäsolmulle täsmälleen yksi sen AND-seuraajasolmu on aligraafissa.
  (iii) Kullekin AND-sisäsolmulle kaikki sen OR-seuraajasolmut ovat mukana aligraafissa.
  (iv) Kaikissa aligraafin lehtisolmuissa on lause Q (ja kaikissa muissa AND-solmuissa P).

Esimerkki. Olkoon $D_0 = \{\mathbf{EF}P \wedge \neg P\}$.

- D_0:n AND-seuraajat:
  $C_1 = \{\mathbf{EF}P \wedge \neg P, \mathbf{EF}P, \neg P, P\}$ ja
  $C_2 = \{\mathbf{EF}P \wedge \neg P, \mathbf{EF}P, \neg P, \mathbf{EXEF}P\}$
  (C_1 voidaan karsia)
- C_2:n OR-seuraajat: $D_1 = \{\mathbf{EF}P\}$
- D_1:n AND-seuraajat:
  $C_3 = \{\mathbf{EF}P, P\}$ ja
  $C_4 = \{\mathbf{EF}P, \mathbf{EXEF}P\}$
- C_3:n OR-seuraajat: $D_2 = \{\}$
- D_2:n AND-seuraajat: $C_5 = \{\}$
- C_5:n OR-seuraajat: $\{\} = D_2$
- C_4:n OR-seuraajat: $\{\mathbf{EF}P\} = D_1$
- Alustava taulu T_0 on valmis.
- Ainoa tulevaisuuslause $\mathbf{EF}P$ toteutuu jokaisessa AND-solmussa.
  Lopullinen taulu T_1 valmis.

Teoreema. Olkoon CTL-lause P positiivisessa normaalimuodossa. Tällöin P on toteutuva joss lopullisessa taulussa T_1 on AND-solmu, joka sisältää lauseen P.

- CTL-taulut antavat lauseen P mallin:
  Mallin tilat AND-solmuja ja valuaatio suoraan AND-solmun sisältämistä atomilauseista.
  Seuraajat valittava siten, että tulevaisuuslauseet toteutuvat.
- Taulumenetelmä ohjelmasynteesissä:
  (i) Ohjelman määrittely CTL-lauseina.
  (ii) Tauluilla määrittelylle automaattisesti malli, joka antaa ohjelman ohjausrakenteen.
- CTL-taulut antavat menetelmän myös LTL-toteutuvuuden tarkastamiseen:

Teoreema. Olkoon LTL-lause P positiivisessa normaalimuodossa ja CTL-lause P' saatu siitä korvaamalla operaattorit $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{B}$, operaattoreilla $\mathbf{AF}, \mathbf{AG}, \mathbf{AX}, \mathbf{AU}, \mathbf{AB}$. Tällöin P on LTL-toteutuva joss P' on CTL-toteutuva.

Laskennallinen vaativuus

- CTL

  Mallitarkastus: $\mathbf{P}$-täydellinen
  $O(|M| \cdot |P|)$

  Toteutuvuus: $\mathbf{EXPTIME}$-täydellinen

- LTL

  Mallitarkastus: $\mathbf{PSPACE}$-täydellinen
  $O(|M| \cdot exp(|P|))$

  Toteutuvuus: $\mathbf{PSPACE}$-täydellinen

- CTL*

  Mallitarkastus: $\mathbf{PSPACE}$-täydellinen
  $O(|M| \cdot exp(|P|))$

  Toteutuvuus: 2$\mathbf{EXPTIME}$-täydellinen