KÄÄNNÖS PREDIKAATTILOGIIKKAAN

Modaalilogiikka voidaan kääntää rajoitettuun osajoukkoon predikaattilogiikkaa:

- Jokaiselle modaalilogiikan atomilauseelle P on yksipaikkainen predikaattisymboli P.
- Kaksi muuttujaa.
- Kaksipaikkainen predikaattisymboli R.

Olkoon x_1 ja x_2 kaksi eri muuttujaa ja jos x on toinen näistä, x' on toinen.

Määritelmä. Olkoon τ seuraava kuvaus modaalilauseilta ja muuttujilta predikaattilogiikan lauseille:

1. $\tau(\top, x) = \top$; $\tau(\bot, x) = \bot$;
2. $\tau(P, x) = P(x)$ atomilauseelle P;
3. $\tau(\neg P, x) = \neg\tau(P, x)$;
4. $\tau(P \to Q, x) = \tau(P, x) \to \tau(Q, x)$;
5. $\tau(\Box P, x) = \forall x'(R(x, x') \to \tau(P, x'))$;

Esim. $\tau(\neg\Box P \to \Box\neg\Box P, x_1)$
$= \tau(\neg\Box P, x_1) \to \tau(\Box\neg\Box P, x_1)$
$= \neg\tau(\Box P, x_1) \to \forall x_2(R(x_1, x_2) \to \tau(\neg\Box P, x_2))$
$= \neg(\forall x_2(R(x_1, x_2) \to \tau(P, x_2))) \to$
$\forall x_2(R(x_1, x_2) \to \neg\tau(\Box P, x_2))$
$= \neg(\forall x_2(R(x_1, x_2) \to P(x_2))) \to$
$\forall x_2(R(x_1, x_2) \to \neg(\forall x_1(R(x_2, x_1) \to \tau(P, x_1))))$
$= \neg(\forall x_2(R(x_1, x_2) \to P(x_2))) \to$
$\forall x_2(R(x_1, x_2) \to \neg(\forall x_1(R(x_2, x_1) \to P(x_1))))$

Teoreema.

(i) P on $\mathbf{K}$-pätevä joss $\forall x_1 \tau(P, x_1)$ on pätevä predikaattilogiikassa.

(ii) $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ joss $\tau(\Sigma) \models_{\mathrm{cl}} \forall x_1 \tau(P, x_1)$,

missä $\tau(\Sigma) = \{\forall x_1 \tau(Q, x_1) \mid Q \in \Sigma\}$.

— Modaalilogiikka $\mathbf{T}$:

P on $\mathbf{T}$-pätevä joss
$\{\forall x_1 R(x_1, x_1)\} \models_{\mathrm{cl}} \forall x_1 \tau(P, x_1)$.

— Modaalilogiikka $\mathbf{S5}$:

P on $\mathbf{S5}$-pätevä joss $\Sigma_{\mathbf{S5}} \models_{\mathrm{cl}} \forall x_1 \tau(P, x_1)$

missä $\Sigma_{\mathbf{S5}} = \{\forall x_1 R(x_1, x_1)$,
$\forall x_1 \forall x_2 (R(x_1, x_2) \rightarrow R(x_2, x_1))$,
$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (R(x_1, x_2) \wedge R(x_2, x_3) \rightarrow R(x_1, x_3))\}$

MULTIMODAALILOGIIKAT

Monen agentin tietämyslogiikka $\mathbf{S5_n}$

- n agenttia: $K_i, i = 1, \ldots, n$

  Esim. $K_1 K_2 \neg K_1 P$
- Malli $\langle S, R_1, \ldots, R_n, v \rangle$
- $\mathcal{M}, s \Vdash K_i P$ joss $\mathcal{M}, t \Vdash P$ kaikille $t \in S$, joille $sR_i t$.
- (Hilbert) todistusteoria:

  kaikille K_i $\mathbf{S5}$ aksioomat.
- Kaikki tietävät: EP

  $\mathcal{M}, s \Vdash EP$ joss
  $\mathcal{M}, s \Vdash K_i P$ kaikille $i = 1, \ldots, n$

  Aksiooma:
  $EP \leftrightarrow K_1 P \wedge \cdots \wedge K_n P$

- Yleinen tietäminen (common knowledge): CP

  $\mathcal{M}, s \mid\!\vdash CP$ joss
  $\mathcal{M}, s \mid\!\vdash E^k P$ kaikille $k = 1, 2, \ldots$

  $\boxed{\Rightarrow}$ $\mathcal{M}, s \mid\!\vdash CP$ joss $\mathcal{M}, t \mid\!\vdash P$ kaikille $t \in S$, joille t on C-saavutettavissa tilasta s.

  (Maailma t on C-saavutettavissa maailmasta s, jos on olemassa $k \geq 1$ ja jono $(s =)t_0, t_1, \ldots,$ $t_k(= t)$, jolle kaikilla $j = 0, \ldots, k-1$, $t_j R_i t_{j+1}$ jollekin $i, 1 \leq i \leq n$.)

  Aksiooma:
  $CP \to E(P \wedge CP)$

  Päättelysääntö:

  $$\frac{P \to E(Q \wedge P)}{P \to CQ}$$

  Esim. $CP \to K_1 K_2 \cdots K_n P$ on $\mathbf{S5_n}$-pätevä.