MODAALILOGIIKKOJEN TODISTUSTEORIA

Todistusteoria: (syntaktinen) kalkyyli, jolla todetaan, onko annettu lause pätevä/seuraako lause loogisesti lausejoukosta.

$\boxed{\Rightarrow}$ Automatisointi

- Aksiomaattinen (Hilbert-tyyppinen) todistusteoria
- Luonnollisen päättelyn menetelmät
- Taulumenetelmät
- Resoluutio

Hilbert-tyylinen todistusteoria

Modaalilogiikalle $\mathbf{K}$:

Klassiset aksioomat: Kaikki tautologiat.

Modaaliaksioomat: Kaikki muotoa

$$\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$$

olevat lauseet.

Modus Ponens -sääntö:

$$\frac{P, P \to Q}{Q}$$

Välttämättömyyssääntö (N-sääntö):

$$\frac{P}{\Box P}$$

Määritelmä.
Lauseen P $\mathbf{K}$**-johto** lausejoukosta Σ on äärellinen jono lauseita

$\phi_1, \ldots, \phi_n$

siten, että $\phi_n = P$ ja kaikille $i = 1, \ldots, n$

1. $\phi_i \in \Sigma$ tai
2. ϕ_i on joku $\mathbf{K}$:n aksioomeista tai
3. ϕ_i saadaan Modus Ponens -säännöllä tai N-säännöllä jonon aiemmista lauseista.

$(\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P)$

Lauseen P $\mathbf{K}$**-todistus** on lauseen P $\mathbf{K}$-johto tyhjästä lausejoukosta.

$(\emptyset \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ tai $\vdash_{\mathbf{K}} P)$

Esim. $\top \leftrightarrow \Box\top$ on $\mathbf{K}$-todistuva.

1.	$\top \to (\Box\top \to (\top \to \Box\top))$	(Taut)
2.	$\top$	(Taut)
3.	$\Box\top \to (\top \to \Box\top)$	(MP, 1, 2)
4.	$\Box\top$	(N, 2)
5.	$\top \to \Box\top$	(MP, 3, 4)
6.	$\Box\top \to (\top \to (\Box\top \to \top))$	(Taut)
7.	$\top \to (\Box\top \to \top)$	(MP, 4, 6)
8.	$\Box\top \to \top$	(MP, 2, 7)
9.	$(\Box\top \to \top) \to ((\top \to \Box\top) \to$ $((\Box\top \to \top) \wedge (\top \to \Box\top)))$	(Taut)
10.	$(\top \to \Box\top) \to$ $((\Box\top \to \top) \wedge (\top \to \Box\top))$	(MP, 8, 9)
11.	$(\Box\top \to \top) \wedge (\top \to \Box\top)$	(MP, 5, 10)
12.	$(\Box\top \to \top) \wedge (\top \to \Box\top) \to$ $(\top \leftrightarrow \Box\top)$	(Taut)
13.	$\top \leftrightarrow \Box\top$	(MP, 11, 12)

Johdettuja sääntöjä:

R-sääntö

$$\frac{P \to Q}{\Box P \to \Box Q}$$

1. $P \to Q$ (GP)
2. $\Box(P \to Q)$ $(\mathsf{N}, 1)$
3. $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$ (K)
4. $\Box P \to \Box Q$ $(\mathsf{MP}, 2, 3)$

Yleistetty R-sääntö

$$\frac{P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \to Q}{\Box P_1 \wedge \cdots \wedge \Box P_n \to \Box Q}$$

R$\Diamond$-sääntö

$$\frac{P \to Q}{\Diamond P \to \Diamond Q}$$

1. $P \to Q$ (GP)
2. $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ (Taut)
3. $\neg Q \to \neg P$ $(\mathsf{MP}, 1, 2)$
4. $\Box\neg Q \to \Box\neg P$ $(\mathsf{R}, 3)$
5. $(\Box\neg Q \to \Box\neg P) \to$
   $(\neg\Box\neg P \to \neg\Box\neg Q)$ (Taut)
6. $\neg\Box\neg P \to \neg\Box\neg Q$ $(\mathsf{MP}, 4, 5)$

Soundius ja täydellisyys

Teoreema. $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ joss lauseelle P on olemassa $\mathbf{K}$-johto lausejoukosta Σ.

Todistus. ($\Leftarrow$) **Soundius**:
Jos lauseelle P on $\mathbf{K}$-johto $\phi_1, \ldots, \phi_n (= P)$ lausejoukosta Σ, niin $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$.

Osoitetaan induktiolla kaikille $i = 1, \ldots, n$,
$\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_i$.

$(i = 1)$
$\phi_1 \in \Sigma$, klassinen tautologia tai on muotoa $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$.

Tällöin $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_1$. (Theorem 1.2.7.)

$(i > 1)$
$\phi_i \in \Sigma$, klassinen tautologia, on muotoa $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$ tai on saatu jonon aiemmista lauseista MP- tai N-säännöllä.

Tällöin $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_i$. (Theorem 1.2.7.)

($\Rightarrow$) **Täydellisyys**:
Jos $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$, lauseelle P on olemassa $\mathbf{K}$-johto lausejoukosta Σ.

Oletetaan, että lauseelle P ei ole olemassa $\mathbf{K}$-johtoa lausejoukosta Σ.

Osoitetaan, että $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ ei päde.

Tämä tehdään muodostamalla
kanoninen malli $\mathcal{M}$:
kaikilla P, joille $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ ei päde, on olemassa mallin maailma s, jossa $\mathcal{M}, s \not\Vdash P$.

Mallin maailmat **maksimaalisesti konsistentteja** lausejoukkoja, jotka konstruoidaan **Lindenbaumin lemman** avulla premissijoukosta Σ.

Äärellistä joukkoa $\mathbf{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ sanotaan **Σ-epäkonsistentiksi**, jos $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$.

(Huom! Tyhjä joukko on Σ-epäkonsistentti, jos $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg\top$.)

Joukkoa $\mathbf{A}$ sanotaan **Σ-konsistentiksi**, jos mikään sen äärellinen alijoukko ei ole Σ-epäkonsistentti.

Koska oletimme, että lauseelle P ei ole olemassa $\mathbf{K}$-johtoa lausejoukosta Σ, $\{\neg P\}$ on Σ-konsistentti. ($\emptyset$ on myös Σ-konsistentti, koska $\neg\top \rightarrow P$ on $\mathbf{K}$-todistuva/tautologia.)

1. Jos joukko S on Σ-konsistentti, niin on myös jokainen sen alijoukko.

   Jos jokin alijoukko ei olisi Σ-konsistentti, olisi olemassa sen Σ-epäkonsistentti alijoukko A, mutta $A \subseteq S$, joten S ei olisi Σ-konsistentti, ristiriita.

2. Jos joukko $\mathbf{A}$ on Σ-konsistentti ja $\neg\Box Z \in \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{\#} \cup \{\neg Z\}$ on myös Σ-konsistentti, missä $\mathbf{A}^{\#} = \{Q \mid \Box Q \in \mathbf{A}\}$.

   Oletetaan, että $\mathbf{A}^{\#} \cup \{\neg Z\}$ on Σ-epäkonsistentti.

   Tällöin on olemassa $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \mathbf{A}^{\#}$ ja $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg Z)$.

   Jatketaan johtoa:

1.	$\neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg Z)$	
2.	$\neg\top \vee \neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_n \vee Z$	(Prop, 1)
3.	$(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow Z$	(Prop, 2)
4.	$(\Box\top \wedge \Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box Z$	(GR, 3)
5.	$\Box\top \rightarrow ((\Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box Z)$	(Prop, 4)
6.	$\top \rightarrow \Box\top$	(Ks. s. 4)
7.	$\top \rightarrow ((\Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box Z)$	(Prop, 5, 6)
8.	$(\top \wedge \Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box Z$	(Prop, 7)
9.	$\neg(\top \wedge \Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n \wedge \neg\Box Z)$	(Prop, 8)

$\boxed{\Rightarrow}$ $\mathbf{A}$ on Σ-epäkonsistentti.

3. **Lindenbaumin Lemma:** Jokainen Σ-konsistentti joukko voidaan laajentaa maksimaalisesti Σ-konsistentiksi joukoksi.

($\mathbf{A}$ on maksimaalisesti Σ-konsistentti, jos kaikilla $\mathbf{A}' \supset \mathbf{A}$ $\mathbf{A}'$ on Σ-epäkonsistentti.)

Olkoon $\mathbf{A}$ Σ-konsistentti.
Järjestetään kaikki modaalilauseet jonoon $Q_0, Q_1, \ldots$ ja määritellään:

$\Delta_0 = \mathbf{A}$.

$$\Delta_i = \begin{cases} \Delta_{i-1} \cup \{Q_{i-1}\} & \text{jos } \Delta_{i-1} \cup \{Q_{i-1}\} \\ & \Sigma\text{-konsistentti} \\ \Delta_{i-1} \cup \{\neg Q_{i-1}\} & \text{muutoin} \end{cases}$$

$\Delta = \bigcup_{i \geq 0} \Delta_i$

Tällöin

(i) $\mathbf{A} \subseteq \Delta$

(ii) Kaikille $i = 0, 1, \ldots$ Δ_i on Σ-konsistentti.

Δ_0 on Σ-konsistentti.
Olkoon Δ_{i-1} on Σ-konsistentti.

Oletetaan, että Δ_i on Σ-epäkonsistentti.
Tällöin $\Delta_i = \Delta_{i-1} \cup \{\neg Q_{i-1}\}$ ja
$\Delta_{i-1} \cup \{Q_{i-1}\}$ on Σ-epäkonsistentti.

Siis on olemassa $\{A_1^+, \ldots, A_{n^+}^+\} \subseteq \Delta_{i-1}$, jolle
$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge Q_{i-1})$

sekä $\{A_1^-, \ldots, A_{n^-}^-\} \subseteq \Delta_{i-1}$, jolle
$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^- \wedge \neg Q_{i-1})$

1. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge Q_{i-1})$
2. $\neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^- \wedge \neg Q_{i-1})$
3. $Q_{i-1} \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+)$ (Prop, 1)
4. $\neg Q_{i-1} \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^-)$(Prop, 2)
5. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+) \vee$
   $\neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^-)$ (Prop, 3, 4)
6. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge$
   $A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^-)$ (Prop, 5)

$\boxed{\Rightarrow}$ Δ_{i-1} on Σ-epäkonsistentti.

(iii) Δ on Σ-konsistentti.

Oletetaan, että Δ on Σ-epäkonsistentti.

Siis on olemassa $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \Delta$, jolle $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$.

On olemassa $i \geq 0$, jolle $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \Delta_i$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Δ_i on Σ-epäkonsistentti, ristiriita.

(iv) Δ on maksimaalisesti Σ-konsistentti.

Olkoon $\Delta \cup \{Z\}$ Σ-konsistentti.

Koska $Z = Q_i$ jollakin i, $\Delta \cup \{Q_i\}$ on Σ-konsistentti.

Koska $\Delta_i \cup \{Q_i\} \subseteq \Delta \cup \{Q_i\}$, $\Delta_i \cup \{Q_i\}$ on Σ-konsistentti. [1.]

Siis $Z \in \Delta_{i+1} \subseteq \Delta$

$\boxed{\Rightarrow}$ Δ on maksimaalisesti Σ-konsistentti joukko.

4. Kaikille maksimaalisesti Σ-konsistenteille joukoille Γ, (i) $\Sigma \subseteq \Gamma$ ja (ii) joko $Z \in \Gamma$ tai $\neg Z \in \Gamma$ kaikille lauseille Z.

   (i) Oletetaan $Z \in \Sigma - \Gamma$.

   $\Gamma \cup \{Z\}$ on Σ-epäkonsistentti.

   On olemassa $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \Gamma$, jolle $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge Z)$.

   Jatketaan todistusta:

1.	$\neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge Z)$	
2.	$Z \to \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$	$(\text{Prop}, 1)$
3.	Z	(GP)
4.	$\neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$	$(\text{MP}, 2, 3)$

   Siis $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$.

   $\boxed{\Rightarrow}$ Γ on Σ-epäkonsistentti, ristiriita ja $\Sigma \subseteq \Gamma$.

(ii) Oletetaan $Z \notin \Gamma$ ja $\neg Z \notin \Gamma$.

Siis on olemassa
$\{A_1^+, \ldots, A_{n^+}^+\} \subseteq \Gamma$, jolle
$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge Z)$
sekä $\{A_1^-, \ldots, A_{n^-}^-\} \subseteq \Gamma$, jolle
$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^- \wedge \neg Z)$.

Jatketaan johtoja:

1. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge Z)$
2. $\neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^- \wedge \neg Z)$
3. $Z \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+)$ (Prop, 1)
4. $\neg Z \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^-)$(Prop, 2)
5. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge$
   $A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^-)$ (Prop, $3, 4$)

$\boxed{\Rightarrow}$ Γ on Σ-epäkonsistentti, ristiriita ja joko $Z \in \Gamma$ tai $\neg Z \in \Gamma$ kaikille lauseille Z.

5. Konstruoidaan malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$.

   Olkoon S kaikkien maksimaalisesti Σ-konsistenttien joukkojen luokka.

   Kaikille $s, t \in S$ olkoon sRt joss $s^\# \subseteq t$.

   Kaikille atomilauseille Q olkoon $v(s, Q) = \mathrm{true}$ joss $Q \in s$.

6. Kaikille $s \in S$ ja kaikille lauseille Q

$$\mathcal{M}, s \Vdash Q \text{ joss } Q \in s$$

- $\bot$:
  $\mathcal{M}, s \nVdash \bot$.
  Oletetaan, että $\bot \in s$. Koska $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge \bot)$, s on Σ-epäkonsistentti, ristiriita ja $\bot \notin s$.
- $\neg Q$:
  $\mathcal{M}, s \Vdash \neg Q$ joss $\mathcal{M}, s \nVdash Q$ joss [IH] $Q \notin s$ joss [4.(ii)] $\neg Q \in s$.

- $\Box Q$: ($\Leftarrow$) Olkoon $\Box Q \in s$.
  Olkoon sRt. Tällöin $s^{\#} \subseteq t$, $Q \in t$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash Q$ [IH]. Siis $\mathcal{M}, s \Vdash \Box Q$.
  ($\Rightarrow$) Olkoon $\Box Q \notin s$.
  Joten $\neg\Box Q \in s$ [4.(ii)]. Nyt $t_0 = s^{\#} \cup \{\neg Q\}$ on Σ-konsistentti [2.]
  [Lindenbaum] t_0:lla maks. Σ-konsistentti laajennus t. Nyt sRt, koska $s^{\#} \subseteq t$.
  Koska $\neg Q \in t_0 \subseteq t$, $Q \notin t$ [4.(ii)]. Siis $\mathcal{M}, t \nVdash Q$ [IH] ja $\mathcal{M}, s \nVdash \Box Q$.

7. Jos Σ on pätevä mallissa $\mathcal{M}$ ja on olemassa $t \in S$ siten, että $\mathcal{M}, t \nVdash P$, väittämä $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ ei päde.

   Koska $\Sigma \subseteq s$ kaikille $s \in S$ [4.(i)], Σ on pätevä mallissa $\mathcal{M}$ [6.].

   Koska $\{\neg P\}$ on Σ-konsistentti, on olemassa sen maksimaalisesti Σ-konsistentti laajennus $t \in S$ ja $P \notin t$. Siis $\mathcal{M}, t \nVdash P$ [6.].

$\blacksquare$

Määritelmä. $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ tarkoittaa, että on olemassa lauseeseen P päättyvä lausejono, joka koostuu ensin tulevasta **globaalista osasta** ja sitä seuraavasta **lokaalista osasta**.

Globaalissa osassa jokainen lause on $\mathbf{K}$:n aksiooma, kuuluu lausejoukkoon Σ tai on saatu jonossa edellä olevista lauseista Modus Ponens tai N-säännöllä.

Lokaalissa osassa jokainen lause on $\mathbf{K}$:n aksiooma, kuuluu lausejoukkoon Υ tai on saatu jonossa edellä olevista lauseista Modus Ponens -säännöllä.

Esim. $\{P, P \to Q\} \vdash_{\mathbf{K}} \{\Box Q \to R\} \Longrightarrow R$

1.	P	(GP)
2.	$P \to Q$	(GP)
3.	Q	(MP, $1, 2$)
4.	$\Box Q$	(N, 3)
5.	$\Box Q \to R$	(LP)
6.	R	(MP, $4, 5$)

Huom! $\{P, P \to Q\} \vdash_{\mathbf{K}} \{\Box Q \to R\} \Longrightarrow \Box R$ ei päde.

Johdot ovat äärellisiä.

$\boxed{\Rightarrow}$ **Kompaktius** ($\vdash$):

Jos $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$, niin on olemassa äärellisen joukot $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon' \subseteq \Upsilon$, joille $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon' \Longrightarrow P$.

MP- ja N-sääntö monotonisia.

$\boxed{\Rightarrow}$ **Monotonisuus** ($\vdash$):

Jos $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ ja $\Upsilon_1 \subseteq \Upsilon_2$, niin
$\Sigma_2 \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon_2 \Longrightarrow P$, jos $\Sigma_1 \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon_1 \Longrightarrow P$.

$\boxed{\Rightarrow}$ **Lokaali deduktioteoreema** ($\vdash$):

$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \cup \{Q\} \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow Q \to P$.

Teoreema.[Soundius ja täydellisyys]
$\Sigma \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Todistus. ($\Rightarrow$) Olkoon $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

- Kompaktius ($\models$):

  On olemassa äärelliset joukot $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon' = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subseteq \Upsilon$ siten, että
  $\Sigma' \models_{\mathbf{K}} \Upsilon' \Longrightarrow P$.

- Lokaali deduktioteoreema ($\models$):

  $\Sigma' \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n \to P$.

- Täydellisyysteoreema:

  $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n \to P$.

- Lokaali deduktioteoreema ($\vdash$):

  $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon' \Longrightarrow P$.

- Monotonisuus ($\vdash$):

  $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

($\Leftarrow$) Olkoon $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

- Kompaktius ($\vdash$):

  On olemassa äärelliset joukot $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon' = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subseteq \Upsilon$ siten, että
  $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon' \Longrightarrow P$.

- Lokaali deduktioteoreema ($\vdash$):

  $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n \rightarrow P$.

- Täydellisyysteoreema:

  $\Sigma' \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n \rightarrow P$.

- Lokaali deduktioteoreema ($\models$):

  $\Sigma' \models_{\mathbf{K}} \Upsilon' \Longrightarrow P$.

- Monotonisuus ($\models$):

  $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

$\blacksquare$

Modaalilogiikka T

$\mathbf{T}$ on refleksiivisten kehysten joukko.

Modaalilogiikan $\mathbf{T}$ karakteristinen lause

T: $\Box P \rightarrow P$

Propositio.
$\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![T]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

$\boxed{\Rightarrow}$

Propositio.
$\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![T]\!] \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Hilbert-tyylinen todistusteoria modaalilogiikalle $\mathbf{T}$:

Klassiset aksioomat: Kaikki tautologiat.

Modaaliaksioomat: Kaikki muotoa

K: $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

T: $\Box P \to P$

olevat lauseet.

Modus Ponens -sääntö

N-sääntö

$\boxed{\Rightarrow}$

Propositio.
$\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \vdash_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Modaalilogiikka S5

S5 on ekvivalenttisten kehysten joukko.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{S5}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![T]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![B]\!] \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![T]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![5]\!] \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![T]\!] \cup [\![5]\!] \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Hilbert-tyylinen todistusteoria modaalilogiikalle $\mathbf{S5}$:

Modaaliaksioomat: Kaikki muotoa

K: $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

T: $\Box P \to P$

$4 : \Box P \to \Box\Box P$

$5 : \neg\Box P \to \Box\neg\Box P$

olevat lauseet.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{S5}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \vdash_{\mathbf{S5}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Modaalilogiikka KD45

KD45 on sarjallisien, transitiivisten ja euklidisten kehysten joukko.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{KD45}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![D]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![5]\!] \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Hilbert-tyylinen todistusteoria modaalilogiikalle **KD45**:

Modaaliaksioomat: Kaikki muotoa

K: $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

$D : \Box P \to \Diamond P$

$4 : \Box P \to \Box\Box P$

$5 : \neg\Box P \to \Box\neg\Box P$

olevat lauseet.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{KD45}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \vdash_{\mathbf{KD45}} \Upsilon \Longrightarrow P$.