ESIMERKKIMODAALILOGIIKKOJA

Kehyslogiikat: valitaan joukko $\mathbf{L}$ kehyksiä $\langle S, R\rangle$.

$\mathbf{L}$-pätevien lauseiden joukko:

1. sisältää kaikki tautologiat;
2. sisältää lauseen Q aina, kun siihen kuuluvat P ja $P \to Q$;
3. on suljettu sijoituksen suhteen;
4. sisältää kaikki muotoa

   $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

   olevat lauseet;
5. sisältää lauseen $\Box P$ aina, kun siihen kuuluu P.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\mathbf{L}$-pätevien lauseiden joukko on normaali propositionaalinen modaalilogiikka.

$\boxed{\Rightarrow}$ Modaalilogiikka $\mathbf{L}$.

Kehysten joukko kuvataan tyypillisesti antamalla kehysten saavutettavuusrelaatiolle jokin ominaisuus.

Sanotaan, että esim. kehys $\langle S, R\rangle$ on refleksiivinen, jos R on refleksiivinen.

$\boxed{\Rightarrow}$ Refleksiivisten kehysten joukko tarkoittaa niitä kehyksiä $\langle S, R\rangle$, joissa R on refleksiivinen.

Määritelmä. Jos Σ on joukko lauseita, $[\![\Sigma]\!]$ on joukkoon Σ kuuluvien lauseiden kaikkien sijoitusesiintymien joukko.

Esim. Jos $\Sigma = \{P \to P\}$, $[\![\Sigma]\!]$ sisältää mm. lauseet

$\Box\Box Q \to \Box\Box Q$

$(\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)) \to$
$(\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q))$

Modaalilogiikka $\mathbf{K}$

Olkoon $\mathbf{K}$ kaikkien kehysten joukko.

$\mathbf{K}$ heikoin normaali modaalilogiikka:

jos lause on $\mathbf{K}$-pätevä, se on $\mathbf{L}$-pätevä, jokaisella normaalilla modaalilogiikalla $\mathbf{L}$.

Karakteristinen lause:

K: $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

Huom! Jokainen joukon $[\![\mathrm{K}]\!]$ lause on $\mathbf{K}$-pätevä.

Olkoon $\mathcal{M}, s \mid\!\mid\!\!- \Box(P \to Q)$.

Tällöin kaikille t, joille sRt, $\mathcal{M}, t \mid\!\mid\!\!- P \to Q$.

Jos $\mathcal{M}, s \mid\!\mid\!\!- \Box P$, kaikille t, joille sRt, $\mathcal{M}, t \mid\!\mid\!\!- P$.

Joten kaikille t, joille sRt, $\mathcal{M}, t \mid\!\mid\!\!- Q$ ja $\mathcal{M}, s \mid\!\mid\!\!- \Box Q$.

Siis $\mathcal{M}, s \mid\!\mid\!\!- \Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$.

Modaalilogiikka $\mathbf{T}$

Olkoon $\mathbf{T}$ refleksiivisten kehysten joukko.

(Kehys $\langle S, R\rangle$ on refleksiivinen, jos $\forall x(xRx)$ tosi kehyksessä).

Esimerkiksi jos $\Box$ tarkoittaa tietämistä, kehysten refleksiivisyys on luontevaa:

jos agentti tietää P:n, P on totta.

- Olkoon $\langle S, R, v\rangle, s \mid\!\mid\!\!- \Box P$.
- Jotta myös $\langle S, R, v\rangle, s \mid\!\mid\!\!- P$, riittää, että R on refleksiivinen.

  Jos $\langle S, R, v\rangle, s \mid\!\mid\!\!- \Box P$,

  kaikilla $t \in S$, joille sRt, $\langle S, R, v\rangle, t \mid\!\mid\!\!- P$.

  Kun R refleksiivinen, sRs ja $\langle S, R, v\rangle, s \mid\!\mid\!\!- P$.

Modaalilogiikan $\mathbf{T}$ karakteristinen lause

T: $\Box P \to P$

on pätevä kehyksessä joss kehys on refleksiivinen.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\mathbf{T} = \mathbf{K} + [\![\mathrm{T}]\!]$

Propositio.
$\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow \mathrm{P}$.

Todistus. ($\Leftarrow$) Olkoon $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow \mathrm{P}$.

Koska $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{K}$, $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow \mathrm{P}$.

Lauseet $[\![\mathrm{T}]\!]$ ovat $\mathbf{T}$-päteviä.

Joten $\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

($\Rightarrow$) Oletetaan, että $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow \mathrm{P}$ ei päde.

Olemassa malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ siten, että lauseet $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!]$ ovat päteviä tässä mallissa ja tässä mallissa on maailma s, jossa $\langle S, R, v \rangle, s \Vdash \Upsilon \cup \{\neg P\}$.

Olkoon $R^* = R \cup \{\langle s, s \rangle, s \in S\}$.

Tällöin jokaiselle maailmalle $s \in S$ ja lauseelle Q $\langle S, R, v \rangle, s \Vdash Q$ joss $\langle S, R^*, v \rangle, s \Vdash Q$.

- Jos Q on atomilause, $\langle S, R, v \rangle, s \Vdash Q$ joss $\langle S, R^*, v \rangle, s \Vdash Q$.

  $\vdots$

- ($\Leftarrow$) Jos $\langle S, R, v \rangle, s \nVdash \Box Q$, on olemassa t, sRt, $\langle S, R, v \rangle, t \nVdash Q$.
  Induktio-oletuksella $\langle S, R^*, v \rangle, t \nVdash Q$.
  Nyt sR^*t ja $\langle S, R^*, v \rangle, s \nVdash \Box Q$.

  ($\Rightarrow$) Jos $\langle S, R^*, v \rangle, s \nVdash \Box Q$, on olemassa t, sR^*t, $\langle S, R^*, v \rangle, t \nVdash Q$.

  1. Jos $t \neq s$, sRt ja $\langle S, R, v \rangle, s \nVdash \Box Q$.
  2. Jos $t = s$, $\langle S, R, v \rangle, s \nVdash Q$.
     Koska $\Box Q \to Q$ on pätevä mallissa $\langle S, R, v \rangle$, $\langle S, R, v \rangle, s \nVdash \Box Q$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Koska $\langle S, R^* \rangle$ on refleksiivinen kehys, myöskään $\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$ ei päde. ∎

Mallien relaatioiden ominaisuuksia

Kehyksen ominaisuuksia ja vastaavia modaalilogiikan lauseita:

1. Refleksiivisyys:
$\forall s(sRs)$ $\quad \Box A \to A$
2. Symmetrisyys:
$\forall s \forall t(sRt \to tRs)$ $\quad A \to \Box\Diamond A$
3. Sarjallisuus:
$\forall s \exists t(sRt)$ $\quad \Box A \to \Diamond A$
4. Transitiivisuus:
$\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge tRu \to sRu)$ $\quad \Box A \to \Box\Box A$
5. Euklidisuus:
$\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge sRu \to tRu)$ $\quad \neg\Box A \to \Box\neg\Box A$

6. Ositt. funktionaalinen:
$\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge sRu \to t = u)$ $\quad \Diamond A \to \Box A$
7. Funktionaalinen:
$\forall s \exists! t(sRt)$ $\quad \Diamond A \leftrightarrow \Box A$
8. Heikosti tiheä:
$\forall s \forall t(sRt \to \exists u(sRu \wedge uRt))$ $\quad \Box\Box A \to \Box A$
9. Heikosti kytketty:
$\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge sRu \to tRu \vee t = u \vee uRt)$ $\quad \Box(A \wedge \Box A \to B) \vee \Box(B \wedge \Box B \to A)$
10. Heikosti suunnattu:
$\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge sRu \to \exists v(tRv \wedge uRv))$ $\quad \Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$

Teoreema. Olkoon $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$ jokin kehys. Silloin kullekin ominaisuuksista 1–10, jos R täyttää ominaisuuden, niin vastaavan lauseen kaikki sijoitusesiintymät ovat päteviä $\mathcal{F}$:ssä.

Todistus.

2. Olkoon R symmetrinen.
   Oletetaan, että $\mathcal{M}, s \Vdash A$ ja $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\Diamond A$.
   Tällöin on olemassa t, sRt ja $\mathcal{M}, t \nVdash \Diamond A$.
   Täten kaikilla t', tRt', $\mathcal{M}, t' \nVdash A$.
   Koska R on symmetrinen, tRs ja $\mathcal{M}, s \nVdash A$, ristiriita.
   Siis $\mathcal{M}, s \Vdash A \to \Box\Diamond A$.

Loput kohdat samaan tapaan. ■

Vastaavuus on myös toiseen suuntaan.

Teoreema. Kun kehyksessä $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$ jonkin lauseista 1–10 kaikki sijoitusesiintymät ovat päteviä, niin R täyttää vastaavan ominaisuuden.

Modaalilogiikka K4

K4 on transitiivisten kehysten joukko.

Karakteristinen lause

$4 : \Box P \to \Box\Box P$

(positiivinen itsetutkiskelu)

Propositio.
$\Sigma \models_{\mathbf{K4}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![4]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow \mathrm{P}$.

Modaalilogiikka S4

S4 on transitiivisten ja refleksiivisten kehysten joukko.

Propositio.
$\Sigma \models_{\mathbf{S4}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![4]\!] \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow \mathrm{P}$.

Modaalilogiikka KB

KB on symmetristen kehysten joukko.

Karakteristinen lause

$\mathrm{B} : P \to \Box\Diamond P$

Propositio.
$\Sigma \models_{\mathbf{KB}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{B}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow \mathrm{P}$.

Modaalilogiikka B

B on symmetristen ja refleksiivisten kehysten joukko.

Propositio.
$\Sigma \models_{\mathbf{B}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![\mathrm{B}]\!] \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow \mathrm{P}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ **KBT**

Modaalilogiikka S5

S5 on ekvivalenttisten (symmetristen, refleksiivisten ja transitiivisten) kehysten joukko.

Karakteristinen lause

$5 : \neg\Box P \to \Box\neg\Box P$

(Negatiivinen itsetutkiskelu)

Propositio.
$\Sigma \models_{\mathbf{S5}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![\mathrm{B}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow \mathrm{P}$ joss
$\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![5]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow \mathrm{P}$ joss
$\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \cup [\![5]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow \mathrm{P}$.

Välttämättömyyden ja ideaalisen tietämisen logiikka.

Modaalilogiikka D

D on sarjallisten kehysten joukko.

Karakteristinen lause

$\mathrm{D} : \Box P \rightarrow \Diamond P$

$\Sigma \models_{\mathbf{D}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{D}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow \mathrm{P}$.

Modaalilogiikka D4

D4 on sarjallisten ja transitiivisten kehysten joukko.

$\Sigma \models_{\mathbf{D4}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss

$\Sigma \cup [\![\mathrm{D}]\!] \cup [\![4]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow \mathrm{P}$.

Modaalilogiikka DB

DB on sarjallisten ja symmetristen kehysten joukko.

$\Sigma \models_{\mathbf{DB}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss

$\Sigma \cup [\![\mathrm{D}]\!] \cup [\![\mathrm{B}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow \mathrm{P}$.

Uskomisen logiikka

Se mitä uskotaan ei ole välttämättä totta.

$\boxed{\Rightarrow}$ Kehykset eivät ole välttämättä refleksiivisiä.

Otetaan positiivinen ja negatiivinen itsetutkiskelu.

$\boxed{\Rightarrow}$ Modaalilogiikka **K45**.

Mutta $\neg\Box\bot$ ei ole **K45**-pätevä.

$(\langle\{s\}, \emptyset, v\rangle, s \Vdash \Box\bot)$

Vaaditaan lisäksi sarjallisuus.

$\boxed{\Rightarrow}$ Modaalilogiikka **KD45**
(sarjalliset, transitiiviset ja euklidiset kehykset).

HUOM! Transitiivisuus ei ole redundanttia:

$\Box P \rightarrow \Box\Box P$ ei ole pätevä sarjallisten ja euklidisten kehysten joukossa (**KD5**-pätevä).

- $\neg\Box\bot$ on **KD45**-pätevä.
- $\Box P \to P$ ei ole **KD45**-pätevä.
- $\Box(\Box P \to P)$ on **KD45**-pätevä.

  Olkoon $\langle S, R\rangle$ **KD45**-kehys.

  Olkoon $s \in S$ ja sRt.

  Sarjallisuus: on olemassa u siten, että tRu.

  Transitiivisuus: sRu.

  Euklidisuus: uRt (sRu ja sRt).

  Transitiivisuus: tRt (tRu ja uRt).

  Joten kaikilla t, joilla sRt, tRt.

  Nyt $\langle S, R, v\rangle, s \mid\!\vdash \Box(\Box P \to P)$,
  koska kaikilla t, joilla sRt,
  $\langle S, R, v\rangle, t \mid\!\vdash \Box P \to P$.

Yksinkertaisempi kehysluokka logiikoille S5 ja KD45

Modaalilogiikan **S5** kehyksiksi riittävät **universaalikehykset**, so. kehykset $\langle S, R\rangle$, joissa $R = \{\langle s, t\rangle \mid s, t \in S\}$.

Propositio. Jos lause P on tosi **S5**-kehykseen perustuvassa mallissa, P on tosi myös universaalikehykseen perustuvassa mallissa.

Propositio. Jos lause P on tosi **KD45**-kehykseen perustuvassa mallissa, P on tosi myös mallissa $\langle \{s_0\} \cup S, R, v\rangle$, jossa
$R = \{\langle s, t\rangle \mid s \in \{s_0\} \cup S, t \in S\}$.

Kaikilla näillä logiikoilla globaali deduktioteoreema pätee:

$\Sigma \cup \{Q\} \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss jollekin n
$\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \ldots, \Box^n Q\} \Longrightarrow P.$

ja logiikat ovat kompakteja:

Jos $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$, niin on olemassa äärelliset joukot $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon_0 \subseteq \Upsilon$ siten, että
$\Sigma_0 \models_{\mathbf{L}} \Upsilon_0 \Longrightarrow P.$

Näin ei ole kuitenkaan kaikilla modaalilogiikoilla eikä edes kehyslogiikoilla.

Modaalilogiikka GL

GL on transitiivisten, irrefleksiivisten ja äärellisten kehysten joukko (tai transitiivisten kehysten joukko, joissa ei ole ääretöntä ketjua saavutettavia maailmoja).

Tämä ei vastaa mitään (ensimmäisen kertaluvun) predikaattikalkyylin lauseella ilmaistavaa kehysten ominaisuutta.

Karakteristinen lause

$\mathrm{GL} : \Box(\Box P \to P) \to \Box P$

Globaali deduktioteoreema ei päde eikä **GL** ole kompakti.

Jos Σ ja Υ ovat äärellisiä lausejoukkoja,
$\Sigma \models_{\mathbf{GL}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![\mathrm{GL}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow \mathrm{P}.$