Kertausta — lausekalkyyli

Tik-79.144 Logiikka tietotekniikassa: perusteet

Lausekalkyylin syntaksi

Lausekalkyylin **aakkosto**:

$A_1, A_2, A_3, \ldots$	atomilauseet
$\neg$	negaatio, ei
$\wedge$	konjunktio, ja
$\vee$	disjunktio, tai
$\rightarrow$	implikaatio, jos...niin
$\leftrightarrow$	ekvivalenssi, ...jos ja vain jos...
$()$	sulut

Symbolit $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ ovat **lausekonnektiiveja**.

Lausekalkyylin **lauseenmuodostussäännöt**:

1. atomilauseet ovat **lauseita**.
2. jos P ja Q ovat lauseita, niin myös
   $\neg P$,
   $(P \vee Q)$,
   $(P \wedge Q)$,
   $(P \rightarrow Q)$ ja
   $(P \leftrightarrow Q)$
   ovat **lauseita**.
3. muita **lauseita** ei ole.

Esimerkki.

Lauseita:

A_1
$(A_1 \rightarrow ((A_2 \leftrightarrow A_1) \wedge A_3))$

Kaikkia sulkeita ei tarvitse kirjoittaa.

- Sovitaan, että uloimmat sulkeet voidaan jättää pois

  Esim. lause $(A \vee B)$ on sama lause kuin $A \vee B$.

- Sovitaan konnektiiveille vahvuudet:
  - Negaatio $\neg$ on kaikkein vahvin.
  - Disjunktio $\vee$ ja konjunktio $\wedge$ ovat yhtä vahvoja, mutta heikompia kuin $\neg$ ja vahvempia kuin $\rightarrow, \leftrightarrow$.
  - Implikaatio $\rightarrow$ ja ekvivalenssi $\leftrightarrow$ ovat keskenään yhtä vahvoja, mutta heikompia kuin muut konnektiivit.

Esim. $(A \leftrightarrow (B \vee C))$ on sama lause kuin $A \leftrightarrow B \vee C$.

Seuraava **ei ole** lause: $A \vee B \wedge C$.

Sovitaan, että **ketjukonjunktio** $A \wedge (B \wedge C)$ voidaan kirjoittaa muotoon $A \wedge B \wedge C$, ja **ketjudisjunktio** $A \vee (B \vee C)$ vastaavasti $A \vee B \vee C$.

Lausekalkyylin semantiikka

Määritelmä. Lausekalkyylin **malli** on joukko atomilauseita.

Usein käytetty vaihtoehtoinen määritelmä: kielen, jonka atomilauseiden joukko on $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots\}$, mallit ovat funktioita v (valuaatio) joukolta $\mathcal{A}$ joukolle $\{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}$.

Olkoon malli $M = \{A_1, A_4\}$. Tässä mallissa ovat tosia atomilauseet A_1 ja A_4. Muut atomilauseet, esim. A_2, A_3 ja A_5, eivät ole tässä mallissa tosia.

Määritellään induktiivisesti lauseille P ja malleille M, milloin P on **tosi** M:ssä ($M \models P$).

- $M \models A$ jos ja vain jos (joss) $A \in M$ atomilauseelle A.
- $M \models \neg P$ joss $M \not\models P$.
- $M \models P \wedge Q$ joss $M \models P$ ja $M \models Q$.
- $M \models P \vee Q$ joss $M \models P$ tai $M \models Q$.
- $M \models P \rightarrow Q$ joss $M \not\models P$ tai $M \models Q$.
- $M \models P \leftrightarrow Q$ joss joko $M \models P$ ja $M \models Q$ tai $M \not\models P$ ja $M \not\models Q$.

Esim. Olkoon $M = \{A_1, A_2, A_3\}$.

$$
\begin{aligned}
& M \models A_1 \rightarrow A_2 \wedge A_3 \\
& \quad \text{joss} \quad M \not\models A_1 \text{ tai } M \models A_2 \wedge A_3 \\
& \quad \text{joss} \quad M \not\models A_1 \text{ tai } M \models A_2 \text{ ja } M \models A_3
\end{aligned}
$$

Joten $M \models A_1 \rightarrow A_2 \wedge A_3$.

Jos $M = \{A_1, A_2\}$, $M \not\models A_1 \rightarrow A_2 \wedge A_3$.

Kaikkia esiteltyjä konnektiiveja ei välttämättä tarvita, koska osa konnektiiveista on määriteltävissä toisten avulla.

Jos valittaisiin **peruskonnektiiveiksi** $\neg$ ja $\wedge$, voitaisiin määritellä:

$$
\begin{aligned}
P \vee Q &\Leftrightarrow_{\text{def}} \neg(\neg P \wedge \neg Q) \\
P \rightarrow Q &\Leftrightarrow_{\text{def}} \neg(P \wedge \neg Q) \\
P \leftrightarrow Q &\Leftrightarrow_{\text{def}} (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \\
& \qquad \text{eli} \\
P \leftrightarrow Q &\Leftrightarrow_{\text{def}} \neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(Q \wedge \neg P)
\end{aligned}
$$

Peruskonnektiivit voisi valita monilla muillakin tavoilla, esim. $\neg, \rightarrow$ tai $\neg, \vee$.

Määritelmä. Lause P on **pätevä** (tai **validi**) joss P on tosi jokaisessa lausekalkyylin mallissa. Tämä merkitään $\models P$.

Esim. lause $A \vee \neg A$ on pätevä.

Määritelmä. Lauseet P ja Q ovat **loogisesti ekvivalentteja** joss jokaisessa mallissa M on voimassa: P on tosi M:ssä joss Q on tosi M:ssä.

Huom. Lauseet P ja Q ovat loogisesti ekvivalentteja joss $P \leftrightarrow Q$ on pätevä.

Määritelmä. Lause P on **loogisesti epätosi** joss P on epätosi jokaisessa lausekalkyylin mallissa.

Esim. Lause $A \wedge \neg A$ on loogisesti epätosi.
Huom. Jos P on loogisesti epätosi, niin $\neg P$ on pätevä.

Määritelmä. Lause P on **toteutuva** joss P on tosi ainakin yhdessä lausekalkyylin mallissa.

Esim. Atomilause A on toteutuva: olkoon $M = \{A, ...\}$; nyt $M \models A$.

Määritelmä. Olkoon Σ joukko lausekalkyylin lauseita ja olkoon M lausekalkyylin malli. Sanomme, että M **on Σ:n malli** jos jokainen Σ:n lause on tosi M:ssä. Merkintätapa: $M \models \Sigma$.

Olkoon $\Sigma = \{A, A \rightarrow B, \neg C \vee D\}$. Esimerkiksi $M_1 = \{A, B\}$ on Σ:n malli.

Määritelmä. Lause P on Σ:n **looginen seuraus** joss P on tosi jokaisessa Σ:n mallissa. Merkintätapa: $\Sigma \models P$.
Vastaavasti lausejoukko Γ on Σ:n **looginen seuraus** joss jokainen Γ:n lause on Σ:n looginen seuraus.

Olkoon $\Sigma = \{A, A \rightarrow B\}$. Tällöin $\Sigma \not\models C$ mutta $\Sigma \models B$.

Olkoon $\Sigma = \{A \wedge \neg A\}$.

Tällöin $\Sigma \models P$ olkoonpa P mikä hyvänsä lause.

(Looginen seuraavuus: jos $M \models \Sigma$, niin $M \models P$)

Teoreemantodistusmenetelmät

Miten tutkitaan onko lause pätevä tai seuraako lause loogisesti lausejoukosta?

- Totuustaulut
- Aksiomaattinen (Hilbert-tyyppinen) todistusteoria
- Luonnollisen päättelyn menetelmät
- Analyyttiset taulut
- Resoluutio

Lausekalkyylin analyyttinen taulu

Perusidea: järjestelmällinen (syntaktinen) tapa hakea lauseelle malli. Esimerkiksi

Konjunktio tosi: $\dfrac{P \wedge Q \text{ tosi}}{P \text{ tosi}, Q \text{ tosi}}$ Disjunktio tosi: $\dfrac{P \vee Q \text{ tosi}}{P \text{ tosi } \textbf{tai } Q \text{ tosi}}$

Lausekalkyylin analyyttisen taulun säännöt:

α-säännöt:

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}} \quad \frac{\neg(P \vee Q)}{\begin{array}{c}\neg P\\ \neg Q\end{array}} \quad \frac{\neg(P \rightarrow Q)}{\begin{array}{c}P\\ \neg Q\end{array}} \quad \frac{P \wedge Q}{\begin{array}{c}P\\ Q\end{array}} \quad \frac{\neg\neg P}{P}$$

β-säännöt:

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2} \quad \frac{P \vee Q}{P \mid Q} \quad \frac{P \rightarrow Q}{\neg P \mid Q} \quad \frac{\neg(P \wedge Q)}{\neg P \mid \neg Q}$$

$$\frac{P \leftrightarrow Q}{P \wedge Q \mid \neg P \wedge \neg Q} \quad \frac{\neg(P \leftrightarrow Q)}{P \wedge \neg Q \mid \neg P \wedge Q}$$

Lauseen P analyyttinen taulu

1. $\neg P$ puun juureen.

2. Valitaan puusta vielä käyttämätön lause Q, jolle on sääntö.

> Jos lause Q on α-lause, niin lisätään kunkin Q:n kanssa samassa alipuussa olevan lehtisolmun alle α_1 ja tämän alle α_2.
>
> Jos lause Q on β-lause, niin lisätään kunkin Q:n kanssa samassa alipuussa olevan lehtisolmun alle lauseet β_1, β_2 uusiksi lehdiksi.
>
> Merkitään lause käytetyksi.

Jos puussa ei ole muita käyttämättömiä lauseita kuin atomilauseita ja niiden negaatioita, on puu valmis.

Jos taulun haarassa on lause ja sen negaatio, haara on **suljettu** muutoin se on avoin.

Esimerkki. Lauseen $(A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)$ taulu:

1. $\neg((A \vee B) \rightarrow (A \wedge B))$
2. $A \vee B$ (1)
3. $\neg(A \wedge B)$ (1)

4. A (2)		5. B (2)	
6. $\neg A$ (3)	7. $\neg B$ (3)	8. $\neg A$ (3)	9. $\neg B$ (3)
$\times$			$\times$

Haara I: lauseet 1,2,3,4,6 (suljettu: 4 ja 6 komplementäärisiä)
Haara II: lauseet 1,2,3,4,7 (avoin)
Haara III: lauseet 1,2,3,5,8 (avoin)
Haara IV: lauseet 1,2,3,5,9 (suljettu: 5 ja 9 komplementäärisiä)

Määritelmä. Jos lauseelle P rakennetun taulun kaikki haarat ovat suljettuja, on taulu lauseen P **todistus**, ja lause P on **teoreema** eli $\vdash P$.

Esimerkki. Todistetaan $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$.

1. $\neg((A \wedge B) \rightarrow (A \vee B))$	
2. $A \wedge B$	(1)
3. $\neg(A \vee B)$	(1)
4. A	(2)
5. B	(2)
6. $\neg A$	(3)
7. $\neg B$	(3)
$\times$	

Taulun rakentaminen

- Jos kaikki haarat ovat suljettuja, ei jäljellä olevia käyttämättömiä lauseita tarvitse käyttää.
- Jos voidaan valita, kannattaa usein käyttää ensin α-lause, koska tällöin puu haarautuu myöhemmin, ja puusta tulee pienempi.

Vastamallit

Jos valmiissa puussa on avoin haara, saadaan malli M, jossa puun juuressa oleva lause on tosi, ja todistettava lause epätosi. Malli M koostuu niistä atomilauseista, jotka esiintyvät yksittäisinä avoimessa haarassa.

Esimerkki. Yritä todistaa $(A \vee B) \rightarrow A$.

1. $\neg((A \vee B) \rightarrow A)$
2. $A \vee B$ (1)
3. $\neg A$ (1)

4. A (2)	5. B (2)
$\times$	

Malli $M = \{B\}$. Helppo tarkistaa, että
$M \models \neg((A \vee B) \rightarrow A)$
ja $M \not\models (A \vee B) \rightarrow A$.

Määritelmä. Olkoon $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ joukko lauseita ja ϕ lause. Jos puu, joka saadaan laittamalla puuhun aluksi päällekäin $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \neg\phi$, sulkeutuu, niin ϕ on **johdettavissa** Σ:sta eli $\Sigma \vdash \phi$.

Esimerkki. Osoita, että

$\{P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R\} \vdash R$.

Taulumenetelmä on **soundi**

Jos $\vdash P$, niin $\models P$.

ja **täydellinen**.

Jos $\models P$, niin $\vdash P$.

Lause. Olkoon Σ joukko lausekalkyylin lauseita ja ϕ lausekalkyylin lause. Tällöin $\Sigma \vdash \phi$ jos ja vain jos $\Sigma \models \phi$. Ja $\vdash \phi$ jos ja vain jos $\models \phi$.

Normaalimuodot

- Konjunktiivinen normaalimuoto (CNF)
$(L_1^1 \vee \ldots \vee L_{n_1}^1) \wedge \ldots \wedge (L_1^m \vee \ldots \vee L_{n_m}^m)$
- Disjunktiivinen normaalimuoto (DNF):
$(L_1^1 \wedge \ldots \wedge L_{n_1}^1) \vee \ldots \vee (L_1^m \wedge \ldots \wedge L_{n_m}^m)$
- Jokaisella lauseella on sen kanssa ekvivalentti konjunktiivisessa (disjunktiivisessa) normaalimuodossa oleva lause.
- Normaalimuodot voidaan löytää esim. taulumenetelmällä:

  (i) Lauseen P DNF: rakennetaan taulu, jonka juurena on P. DNF saadaan muodostamalla konjunktiot kunkin avoimen haaran literaaleista ja yhdistämällä nämä disjunktioilla.

  (ii) Lauseen P CNF: muodostetaan lauseen $\neg P$ DNF taululla kuten yllä. CNF saadaan komplementoimalla literaalit ja suorittamalla korvaukset $\vee \mapsto \wedge$, $\wedge \mapsto \vee$.

Kertausta—predikaattikalkyyli

Aakkosto:

$c_1, c_2, c_3, \ldots$	vakiot
$f_j^i, (i, j = 1, 2, \ldots)$	funktiosymbolit
$P_j^i, (i, j = 1, 2, \ldots)$	predikaattisymbolit
$x_1, x_2, x_3, \ldots$	muuttujat
$\neg$	negaatio
$\wedge$	konjunktio
$\vee$	disjunktio
$\rightarrow$	implikaatio
$\leftrightarrow$	ekvivalenssi
$=$	identiteettisymboli
$\exists$	eksistenttikvanttori
$\forall$	universaalikvanttori
$(,)$	sulut ja pilkku

Termit:

1. Muuttuja on termi.
2. Vakio on termi.
3. Jos f_i^n on n-paikkainen funktiosymboli ja $t_1, \ldots, t_n$ ovat termejä, niin $f_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ on termi.
4. Muita termejä ei ole.

Atomikaavat:

Olkoon P_i^n n-paikkainen predikaatisymboli ja $t_1, \ldots, t_n$ ovat termejä. Tällöin $P_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ ja $t_1 = t_n$ ovat atomikaavoja. Muita atomikaavoja ei ole.

Lauseenmuodostussäännöt:

1. Atomikaavat ovat **kaavoja**.
2. Jos P ja Q ovat kaavoja ja x muuttuja, niin myös
   $\neg P$,
   $(P \vee Q)$,
   $(P \wedge Q)$,
   $(P \rightarrow Q)$,
   $(P \leftrightarrow Q)$,
   $\exists x P$ ja
   $\forall x P$
   ovat **kaavoja**.
3. muita **kaavoja** ei ole.

Lause on kaava, jossa ei ole vapaita muuttujia.

Predikaattilogiikan semantiikka

Määritelmä. Struktuuri (rakenne) $\mathcal{A}$ kielelle $\mathcal{L}$ on $\langle A, s\rangle$, missä

- A on domain (alue, universumi), jokin ei-tyhjä joukko
- s liittää jokaiseen

  n-paikkaiseen predikaattisymboliin P relaation $P^{\mathcal{A}} \subseteq A \times \cdots \times A = A^n$,

  vakioon c domainin alkion $c^{\mathcal{A}} \in A$,

  n-paikkaiseen funktiosymboliin f funktion $f^{\mathcal{A}}$ joukolta A^n joukolle A.

Muuttujattomien termien tulkinta

- Vakio c **nimeää** domainin alkion $c^{\mathcal{A}}$.
- Jos termit $t_1, \ldots, t_n$ nimeävät domainin alkion $t_1^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}}$, niin $f(t_1, \ldots, t_n)$ **nimeää** domainin alkion $f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}})$.

Näin voimme viitata kielen $\mathcal{L}$ muuttujattomilla termeillä domainin A alkioihin (kunhan symbolien tulkinnat on annettu).

Kuulukoon kieleen $\mathcal{L}$ symbolit P, c, d, f, g. Olkoon struktuurin $\mathcal{A}$ domain luonnolliset luvut $0, 1, 2, \ldots$

$P^{\mathcal{A}}$	$=$	$\emptyset$ (tyhjä relaatio)	c	$\mapsto$	1
$c^{\mathcal{A}}$	$=$	1	d	$\mapsto$	7
$d^{\mathcal{A}}$	$=$	7	$f(c)$	$\mapsto$	2
$f^{\mathcal{A}}$	$=$	seuraajafunktio, eli $f^{\mathcal{A}}(n) = n + 1$	$f(f(c))$	$\mapsto$	3
$g^{\mathcal{A}}$	$=$	summafunktio, eli $g^{\mathcal{A}}(n, m) = n + m$	$g(f(c), d)$	$\mapsto$	9

1. Konstruoidaan struktuuri $\mathcal{A}_1$ kielelle, jossa on 2-paikkainen predikaattisymboli O ja vakiosymbolit c, d, e. Olkoon $A = \{1, 2\}$.

$$\begin{aligned} O^{\mathcal{A}_1} &= \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\} \\ c^{\mathcal{A}_1} &= 1 \\ d^{\mathcal{A}_1} &= 2 \\ e^{\mathcal{A}_1} &= 1 \end{aligned}$$

2. Konstruoidaan struktuuri $\mathcal{A}_2$ kielelle, jossa on 1- ja 2-paikkaiset predikaattisymbolit P_1, P_2, vakio c ja funktiosymboli f. Olkoon A luonnollisten lukujen joukko.

$$\begin{aligned} P_1^{\mathcal{A}_2} &= \{n \mid n \text{ on parillinen luonnollinen luku }\} \\ P_2^{\mathcal{A}_2} &= \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \ldots\} \\ f^{\mathcal{A}_2} &= \text{ funktio } f^{\mathcal{A}_2}(n) = 3 \cdot n + 7 \\ c^{\mathcal{A}_2} &= 1024 \end{aligned}$$

Predikaattilogiikan totuusmääritelmä

Olkoon $\mathcal{A}$ struktuuri kielelle $\mathcal{L}$ siten, että jokainen A:n alkio on jonkin $\mathcal{L}$:n muuttujattoman termin nimeämä.

1. $\mathcal{A} \models t_1 = t_2$ joss $t_1^{\mathcal{A}}$ ja $t_2^{\mathcal{A}}$ ovat sama A:n alkio.
2. $\mathcal{A} \models P(t_1, \ldots, t_n)$ joss $\langle t_1^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}}\rangle \in P^{\mathcal{A}}$
3. $\mathcal{A} \models \neg\psi$ joss $\mathcal{A} \not\models \psi$
4. $\mathcal{A} \models \psi \wedge \phi$ joss $\mathcal{A} \models \psi$ ja $\mathcal{A} \models \phi$
5. $\mathcal{A} \models \psi \vee \phi$ joss $\mathcal{A} \models \psi$ tai $\mathcal{A} \models \psi$
6. $\mathcal{A} \models \psi \rightarrow \phi$ joss $\mathcal{A} \not\models \psi$ tai $\mathcal{A} \models \phi$
7. $\mathcal{A} \models \psi \leftrightarrow \phi$ joss joko $\mathcal{A} \models \psi$ ja $\mathcal{A} \models \phi$ tai $\mathcal{A} \not\models \psi$ ja $\mathcal{A} \not\models \phi$
8. $\mathcal{A} \models \exists x \psi(x)$ joss $\mathcal{A} \models \psi(t)$ **jollekin** muuttujattomalle termille t
9. $\mathcal{A} \models \forall x \psi(x)$ joss $\mathcal{A} \models \psi(t)$ **kaikille** muuttujattomille termeille t

- Kohdissa 8 ja 9 oletetaan, että jokaisella A:n alkiolla a on nimi $\mathcal{A}$:ssa (muuttujaton termi t siten, että $t^{\mathcal{A}} = a$).
- Tarvittaessa kieli $\mathcal{L}$ ja struktuuri $\mathcal{A}$ voidaan täydentää (esim. lisäämällä vakioita) siten, että tämä vaatimus toteutuu.

Esimerkki. Olkoon kielessä $\mathcal{L}$ symbolit P, c, d. Olkoon $\mathcal{A}$:n domain $A = \{1, 2\}$ ja

$$\begin{aligned} P^{\mathcal{A}} &= \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle\} \\ c^{\mathcal{A}} &= 1 \qquad\qquad d^{\mathcal{A}} = 2 \end{aligned}$$

Lauseen $P(c, d)$ totuus $\mathcal{A}$:ssa:

$c^{\mathcal{A}} = 1$, $d^{\mathcal{A}} = 2$ ja $\langle 1, 2\rangle \in P^{\mathcal{A}}$, joten $\mathcal{A} \models P(c, d)$.

Lause $P(d, c)$: $\langle 2, 1\rangle \notin P^{\mathcal{A}}$, joten $\mathcal{A} \not\models P(d, c)$.

Konjunktion totuusmääritelmällä
$\mathcal{A} \not\models P(c, d) \wedge P(d, c)$.

Lauseen $\forall x \exists y P(x, y)$ totuus $\mathcal{A}$:ssa.

Tutkitaan, onko $\mathcal{A} \models \exists y\ P(c, y)$.

Koska $\mathcal{A} \models P(c, d)$,
$\mathcal{A} \models \exists y\ P(c, y)$.

Tutkitaan, onko $\mathcal{A} \models \exists y\ P(d, y)$.

Koska $\mathcal{A} \models P(d, d)$,
$\mathcal{A} \models \exists y\ P(d, y)$.

Koska kaikille muuttujattomille termeille t,
$\mathcal{A} \models \exists y\ P(t, y)$, niin $\mathcal{A} \models \forall x \exists y\ P(x, y)$.

Määritelmä. Kielen $\mathcal{L}$ lause ψ on **pätevä** joss ψ on tosi jokaisessa $\mathcal{L}$:n struktuurissa. Tämä merkitään $\models \psi$.

Esimerkki. $\models (\forall x\ P(x)) \leftrightarrow (\neg \exists x\ \neg P(x))$

Määritelmä. Kielen $\mathcal{L}$ lause ψ on **toteutuva** joss ψ on tosi ainakin yhdessä $\mathcal{L}$:n struktuurissa.

Esimerkki. $\exists x \forall y P(x,y)$ on toteutuva.
Olkoon $\mathcal{A}$:n domain $A = \{1,2\}$ ja
$P^{\mathcal{A}} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle\}$.

Määritelmä. Olkoon Σ joukko lauseita kielessä $\mathcal{L}$ ja olkoon $\mathcal{A}$ kielen $\mathcal{L}$ struktuuri. **$\mathcal{A}$ on Σ:n malli** jos jokainen Σ:n lause on tosi $\mathcal{A}$:ssa.
Merkintätapa: $\mathcal{A} \models \Sigma$.
Lausejoukko, jolla on malli, on **toteutuva**.

Määritelmä. Kielen $\mathcal{L}$ lause ψ on $\mathcal{L}$:n lauseiden Σ **looginen seuraus** joss ψ on tosi jokaisessa Σ:n mallissa. Merkintätapa: $\Sigma \models \psi$.

Predikaattikalkyylin analyyttinen taulu

Lausekalkyylin analyyttinen taulu +

γ-säännöt:

$$\frac{\forall x \phi(x)}{\phi(t)} \quad \frac{\neg\exists x \phi(x)}{\neg\phi(t)} \quad t \text{ on mikä tahansa muuttujaton termi.}$$

ja δ-säännöt:

$$\frac{\exists x \phi(x)}{\phi(a)} \quad \frac{\neg\forall x \phi(x)}{\neg\phi(a)} \quad a \text{ on jokin uusi vakio.}$$

Huom! Puun haarojen sulkemiseksi joitain γ-lauseita saatetaan joutua käyttämään useita kertoja.Tämän vuoksi γ-lauseita **ei tule** merkitä käytetyiksi.

Esimerkki. Todistetaan $\forall x\ P(x) \to (P(a) \land P(b))$.

1. $\neg(\forall x\ P(x) \to (P(a) \land P(b)))$
2. $\forall x\ P(x)$ (1)
3. $\neg(P(a) \land P(b))$ (1)

4. $\neg P(a)$ (3)	5. $\neg P(b)$ (3)
6. $P(a)$ (2)	7. $P(a)$ (2)
8. $P(b)$ (2)	9. $P(b)$ (2)
$\times$	$\times$

Lauseet 6 ja 7 saatiin lauseesta 2 ja sijoittamalla x:n paikalle a. Lauseet 8 ja 9 sijoittamalla x:n paikalle b.

Esimerkki. Todistetaan $\forall x\ P(x) \to \neg\exists x \neg P(x)$. Rakennetaan ensin seuraava puu.

1. $\neg(\forall x\ P(x) \to \neg\exists x \neg P(x))$
2. $\forall x\ P(x)$ (1)
3. $\neg\neg\exists x \neg P(x)$ (1)
4. $\exists x \neg P(x)$ (3)

Jos nyt sovelletaan γ-sääntöä lauseeseen (2), ja vasta sen jälkeen δ-sääntöä lauseeseen (4):

5. $P(a_1)$ (2)
6. $\neg P(a_2)$ (4)
7. $P(a_2)$ (2)

$\times$

Lauseessa (6) ei muuttujan x:n paikalle sijoitettu vakio saa olla a_1, koska δ-sääntöjä sovellettaessa tulee vakion olla uusi. Jos ensin käytetään lausetta (4) ja vasta sitten lausetta (2):

5. $\neg P(a_1)$ (4)
6. $P(a_1)$ (2)

$\times$

Esimerkki. Todista lause $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x))$.

1. $\neg((\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow (\forall x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x)))$
2. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ (1)
3. $\neg(\forall x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x))$ (1)
4. $\forall x\ P(x)$ (3)
5. $\neg(\forall x\ Q(x))$ (3)
6. $\neg Q(a)$ (5)
7. $P(a)$ (4)
8. $P(a) \rightarrow Q(a)$ (2)

9. $\neg P(a)$ (8)	10. $Q(a)$ (8)
$\times$	$\times$