JOHDANTO KURSSIN AIHEPIIRIIN

1. Näkemyksiä logiseen päättelyyn
2. Logiikan soveluskohteita tietojenkäsittelyssä
3. Joitain esitietoja

1 Näkemyksiä logiseen päättelyyn

Ihmisen suorittama päättely

on usein erilaisten syiden ja seurausten analysointia. Keskeisiä piirteitä:

- päättelykyvyn rajallisuus ja
- käytettävissä olevien resurssien (aika ja muisti) rajallisuus.

Esimerkki.
Hemmo tulee töihin omalla autollaan ainoastaan siloin, kun sataa tai bussinkuljettajat ovat lakossa. Muutoin hän kulkee töihin bussilla.
Hemmo tuli tänään töihin omalla autollaan.
Bussinkuljettajat ovat tänään normaalisti töissä.

Tänään sataa.

Formaali päättely

Matemaattinen logiikka tekee logisesta päättelystä formaalin:

- väittämät esitetään formaalilla kielellä ja
- johtopäätösten hyväksyttävyydelle annetaan eksaktit kriteerit.

Malli on ideaalinen (vrt. ihmisen suorittama päättely) ja abstrakti.

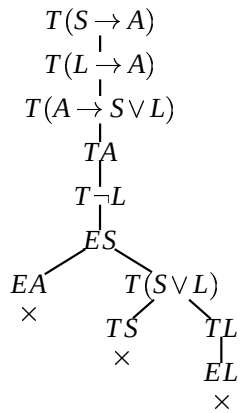
Päättely voidaan palauttaa merkkijonojen käsittelyksi ao. kielessä.

Esimerkki. Formalisoidaan edellisen esimerkin väittämät:

$$\{ \quad S \to A, \quad L \to A, \quad A \to S \vee L, \quad A, \quad \neg L \quad \}.$$

Näistä voidaan päätellä S vaikkapa semanttisen taulun menetelmällä.

Esimerkki. Todistuksesta muodostuu seuraavanlainen puu:



Todistuksen muoto ei riipu atomisille väittämille S, A ja L annetuista merkityksistä (suoritettujen päätelmien abstraktius).

Automaattinen/mekaaninen päättely

Toteutetaan loginen päättely tietokoneohjelmana (päättelykone).

Esimerkki. Suoritetaan vastaava päättely eräällä automaattisella teoreemantodistimella (`http://www-unix.mcs.anl.gov/AR/otter/`):

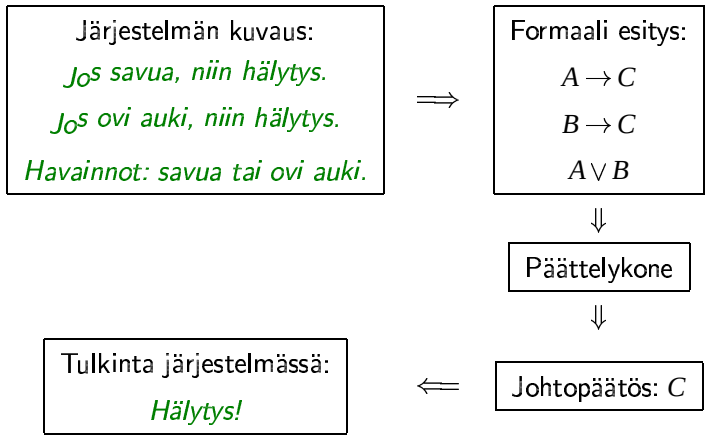
Syötetiedosto:

```
set(auto).
formula_list(usable).
S -> A.
L -> A.
A -> S|L.
A. -L. -S.
end(list).
```

Osa tulosteesta:

```
------------ PROOF ------------
3 [] -A|S|L.
4 [] -L.
5 [] -S.
6 [] A.
8 [hyper,6,3,unit_del,5,4] $F.
-------- end of proof ---------
```


Esimerkki. Tarkastellaan yksinkertaisen hälyttimen kuvausta:



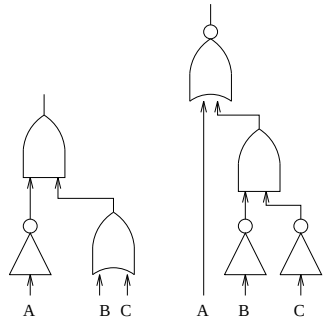
2 Logiikan sovelluskohteita tietojenkäsittelyssä

Voidaan nähdä karkea kahtiajako:

- **Päättelykomponentti järjestelmän osana: esim.**
  - Ehtolausekkeiden ajonaikainen evaluointi
  - Kyselyjen evaluointi (tietokannat, hakukoneet, ...)
  - Logiikkaohjelmointi (PROLOG)
  - Rajoiteohjelmointi
- **Järjestelmän ominaisuuksien määrittely ja analysointi: esim.**
  - Ehtolausekkeiden muokkaaminen ohjelmia kehitettäessä
  - Ohjelmien vaatimusmäärittelyt ja oikeellisuustarkastelut
  - Ohjelmien synteesi

Esimerkki. Kombinatoriset piirit

Laskevatko seuraavat kombinatoriset piirit samat funktiot?



Piirien kuvaukset lauselogiikalla: $\neg A \wedge (B \vee C)$ ja $\neg(A \vee (\neg B \wedge \neg C))$

Esimerkki. Ohjelmien ehtolauseke**et**

Olkoon `myptr` tyyppiä "`char *`" C-kielessä.

```
/* TAPA 1 */
if(myptr != NULL && myptr[0] == '/') dothis(myptr);
if(!(myptr == NULL || myptr[0] == '.')) dothat(myptr);

/* TAPA 2 */
if(myptr != NULL) {
  if(myptr[0] == '/') dothis(myptr);
  if(myptr[0] != '.') dothat(myptr);
}
```

Kutsutaanko funktioita `dothis(myptr)` ja `dothat(myptr)` täsmälleen samoilla ehdoilla?

Esimerkki. Ohjelmien esi- ja jälkiehdot

Olkoon `P` seuraava ohjelma:

```
a = 0;
z = 0;
while (a != y) {
  z = z + x;
  a = a + 1;
}
```

Esiehto: `y>=0`

Jälkiehto: `z==x*y`

Halutaan osoittaa, että `[y>=0] P [z==x*y]` eli jos ohjelman `P` suoritus alkaa esiehdon vallitessa, niin jälkiehto on tosi suorituks**en** päättyessä.

Esimerkki. Deduktiiviset tietokannat

linkki(otaniemi,tapiola)

linkki(otaniemi,lehtisaari)

$\forall x \forall y(\text{linkki}(x,y) \rightarrow \text{linkki}(y,x))$

$\forall x \forall y(\text{linkki}(x,y) \rightarrow \text{yhteys}(x,y))$

$\forall x \forall y \forall z(\text{yhteys}(x,y) \wedge \text{yhteys}(y,z) \rightarrow \text{yhteys}(x,z))$

Kuinka selvitetään vastaus kyselyyn yhteys(tapiola,lehtisaari)?
Entä perinteisellä relaatiotietokannalla (SQL-kysely)?

Esimerkki. Logiikkaohjelmointi (PROLOG)

```
append([],L,L).
append([A|T],L,[A|S]) :- append(T,L,S).

?- append([1,2,3],[4,5,6],X).

X = [1,2,3,4,5,6]

?- append([1,X,3],Y,[1,2,3,4]).

X = 2, Y=[4]
```

Vrt. yleinen näkemys: PROGRAM = LOGIC + CONTROL

Esimerkki. Järjestelmän määrittely ja ominaisuuksien analysointi

Helsingin seudun matkakorttijärjestelmän kortinlukijan valot toimivat seuraavilla periaatteilla (kts. `www.matkakortti.net`):

1. Vihreä valo: kausilippu voimassa / arvolippu maksettu / vaihto voimassa.
2. Vihreä ja keltainen valo: kautta jäljellä 3 täyttä päivää tai vähemmän / arvoa jäljellä 5 euroa tai vähemmän.
3. Punainen valo: kausi / vaihto ei voimassa, muu virhe.

Onko mahdollista, että kaikki valot palavat yhtäaikaisesti?

3 Joitain esitietoja

3.1 Induktioperiaate luonnollisille luvuille

Luonnollisten lukujen joukko määritellään induktiivisesti:

- 0 on luonnollinen luku ja
- jos n on luonnollinen luku, niin myös $n+1$ on luonnollinen luku.

Jos halutaan osoittaa, että kaikilla luonnollisilla luvuilla n on jokin ominaisuus P, sovelletaan seuraavaa periaattetta:

Määritelmä. Induktioperiaate.
Olkoon $P(n)$ luonnolliselle luvulle n määritelty ominaisuus.
Jos $P(0)$ ja $\forall n \in \mathbb{N} : (P(n) \to P(n+1))$, niin $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$.

Esimerkki. Todistetaan, että kaikille luonnollisille luvuille n pätee

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Perustapaus: $2^0 = 1$ ja $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$.

Induktiohypoteesi: $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

Induktioaskel:
$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n &= (2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1}) + 2^n \\ &= (2^n - 1) + 2^n \\ &= 2 \times 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Tuloksen tietojenkäsittelyllinen merkitys: täydellisessä binääripuussa on lehtisolmuja yksi enemmän kuin sisäsolmuja.

- Jos kysymyksessä on hakupuu, niin puun syvyyden n kasvattaminen $n+1$:een johtaa työmäärän kaksinkertaistumiseen.

Induktioperiatteesta käytetään usein tiettyjä muunnelmia.

- **Täydellinen induktio** (induktio-oletusta vahvennettu):
  Jos $P(0)$ ja $\forall n \in \mathbb{N} : (\forall m \in \mathbb{N} : (m < n+1 \to P(m)) \to P(n+1))$,
  niin $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$.

Esimerkki. Jokainen luonnollinen luku $n > 1$ voidaan kirjoittaa alkulkujen tuloksi.

- **Yhtäaikainen induktio k:n eri ominaisuuden $P_1, \ldots, P_k$ suhteen:**
  Jos $P_1(0), \ldots, P_k(0)$ ja
  $\forall n \in \mathbb{N} : \forall i \in \{1, \ldots, k\} : (\forall j \in \{1, \ldots, k\} : P_j(n) \to P_i(n+1))$,
  niin $\forall n \in \mathbb{N} : P_1(n), \ldots, \forall n \in \mathbb{N} : P_k(n)$.
  Käyttökelpoinen tilanteissa, joissa $P_1, \ldots, P_k$ riippuvat toisistaan.

3.2 Joukko-opin peruskäsitteet

Tarkastellaan joukkoja $A = \{a,b\}$ ja $B = \{b,c\}$.

- Joukon jäsenyys: $a \in A$, $b \in A$ ja $c \notin A$
- Joukkojen yhtäsuuruus: $A \neq B$
  (koska A:lla ja B:llä ei ole samat alkiot).
- Tyhjä joukko: $\emptyset$ (tai vaihtoehtoisesti $\{\}$)
- Osajoukko: $\emptyset \subseteq A$, $A \not\subseteq B$ ja $B \not\subseteq A$.
- Aito osajoukko: $\emptyset \subset A$
- Joukkojen kardinaliteetti: $|\emptyset| = 0$ ja $|A| = |B| = 2$

Keskeisiä joukkojen välisiä operaatioita

Tarkastellaan edelleen joukkoja $A = \{a,b\}$ ja $B = \{b,c\}$:

- Joukkojen unioni: $A \cup B = \{a,b,c\}$
- Joukkojen leikkaus: $A \cap B = \{b\}$
- Joukkojen erotus: $A - B = \{a\}$ ja $B - A = \{c\}$
- Karteesinen tulo: $A \times B = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle\}$
- Potenssijoukko (eli joukon kaikki osajoukot):
  $$\mathbf{2}^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\} \text{ ja } |\mathbf{2}^A| = 2^{|A|} = 2^2 = 4.$$

Huomio. Joukko $\mathbf{2}^\emptyset = \{\emptyset\}$ eli joukko, jonka alkiona on tyhjä joukko!

3.3 Relaatiot

- Joukkojen $A_1, \ldots, A_n$ *karteesinen tulo*
  $A_1 \times \cdots \times A_n = \{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \,|\, a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$.
- Jos $A_1 = A$, $\ldots$, $A_n = A$, saadaan
  $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ kpl}} = \{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \,|\, a_1 \in A, \ldots, a_n \in A\}$.
  Erikoistapauks$^{\text{et}}$: $A^1 = \{\langle a\rangle \,|\, a \in A\} = A$ ja $A^0 = \{\langle\rangle\}$.
- Joukkojen $A_1, \ldots, A_n$ välinen n-paikkainen *relaatio* R on karteesisen tulon $A_1 \times \cdots \times A_n$ osajoukko.

Esimerkki. Kaksi relaatiota luonnollisten lukujen välillä:

$\{n \,|\, n \in \mathbb{N} \text{ on pariton}\} \subseteq \mathbb{N}^1$

$\{\langle x,y,z\rangle \,|\, x^2 + y^2 = z^2,\ x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}^3$

Määritelmä. Binäärirelaatio $R \subseteq A \times A$ on

- *refleksiivinen*, joss kaikille $a \in A$ pätee $\langle a,a\rangle \in R$.
- *irrefleksiivinen*, joss kaikille $a \in A$ pätee $\langle a,a\rangle \notin R$.
- *symmetrinen*, joss kaikille $a \in A$ ja $b \in A$ pätee:
  jos $\langle a,b\rangle \in R$, niin $\langle b,a\rangle \in R$.
- *asymmetrinen*, joss kaikille $a \in A$ ja $b \in A$ pätee:
  jos $\langle a,b\rangle \in R$, niin $\langle b,a\rangle \notin R$.
- *transitiivinen*, joss kaikille $a \in A$, $b \in A$ ja $c \in A$ pätee:
  jos $\langle a,b\rangle \in R$ ja $\langle b,c\rangle \in R$, niin $\langle a,c\rangle \in R$.
- *ekvivalenssirelaatio*, joss R on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen.

3.4 Funktiot

- *Funktio* $f : A_1 \times \cdots \times A_n \to A$ on relaatio $f \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n \times A$, joka toteuttaa *funktionaalisuusehdon*:

  kaikille $a_1 \in A_1$, ..., $a_n \in A_n$ on olemassa täsmälleen yksi $a \in A$ siten, että $\langle a_1, \ldots, a_n, a \rangle \in f$ (eli f:n arvo pisteessä $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$).

- Kyseistä alkiota merkitään lausekkeella $f(a_1, \ldots, a_n)$.

Määritelmä. Funktio $f : A \to B$ on

- *injektio*, joss kaikille $a \in A$ ja $b \in A$ pätee $f(a) \neq f(b)$.
- *surjektio*, joss kaikille $b \in B$ on olemassa $a \in A$ siten, että $f(a) = b$.
- *bijektio*, joss f on sekä injektio että surjektio.