T-79.144 **Syksy 2004**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 9 (opetusmoniste, kappaleet 4.1 - 4.5)
9 – 12.11.2004

1. Tutki semanttisella taululla:

a) $\{\forall x \exists y (P(x) \to Q(y)), \forall x P(x)\} \models \forall x Q(x)$.

b) $\{\forall x \forall y (\exists z (R(x,z) \wedge R(z,y)) \to R(x,y)), R(a,b), R(b,a)\} \models R(a,a)$.

c) $\models \forall x \exists y R(x,y) \to (\forall y (\neg S(y) \to \neg \exists x R(x,y)) \to \exists x S(x))$.

Ratk.

a)

$$
\begin{array}{c}
1.\ T(\forall x \exists y (P(x) \to Q(y))) \\
| \\
2.\ T(\forall x P(x)) \\
| \\
3.\ E(\forall x Q(x)) \\
| \\
4.\ E(Q(c))\ 3.\ x/c \\
| \\
5.\ T(P(c))\ 2.\ x/c \\
| \\
6.\ T(\exists y (P(c) \to Q(y)))\ 1.\ x/c \\
| \\
7.\ T(P(c) \to Q(d))\ 6.\ y/d \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
8.\ E(P(c))\ 7. & 8.\ T(Q(d))\ 7. \\
\otimes & | \\
 & 9.\ T(P(d))\ 2.\ x/d
\end{array}
\end{array}
$$

Taulu näyttää jäävän auki. Tätä voidaan perustella sillä, että aina kun predikaatti Q tulee instantioida, pitää se tehdä uudella vakiolla. Ristiriita edellyttäisi samaa vakiota totena ja epätotena. Avoimesta haarasta voidaan lukea vastaesimerkki, $\mathcal{A} = \{1,2\}, c^{\mathcal{A}} = 1,\ d^{\mathcal{A}} = 2,\ P^{\mathcal{A}} = \{1,2\},\ Q^{\mathcal{A}} = \{2\}$.

b)

$$1.\ T(\forall x \forall y(\exists z(R(x,z) \wedge R(z,y)) \to R(x,y)))$$

$$2.\ T(R(a,b))$$

$$3.\ T(R(b,a))$$

$$4.\ E(R(a,a))$$

$$5.\ T(\exists z(R(a,z) \wedge R(z,a)) \to R(a,a)),\ 1.\ x/a, y/a$$

$$6.\ T(R(a,b) \wedge R(b,a) \to R(a,a)),\ 5.\ z/b$$

$$7.\ E(R(a,b) \wedge R(b,a)),\ 6. \qquad 7.\ T(R(a,a)),\ 6.\ \otimes$$

$$8.\ E(R(a,b)),\ 7.\ \otimes \qquad 8.\ E(R(b,a)),\ 7.\ \otimes$$

Kaikki haarat ristiriitaisia, esitetty väite pätee.

2. Tiedetään, että

(i) kaikki syylliset ovat valehtelijoita,

(ii) ainakin yksi syytetyistä on myös todistaja ja

(iii) yksikään todistaja ei valehtele.

Todista, etteivät kaikki syytetyt ole syyllisiä. Käytä semanttista taulua.

Olkoon predikaatit $G(x)$ (x on syyllinen), $L(x)$ (x on valehtelija), $A(x)$ (x on syytetty) ja $W(x)$ (x on todistaja). Premissit ovat nyt $\forall x(G(x) \to L(x))$, $\exists x(A(x) \wedge W(x))$ ja $\forall x(W(x) \to \neg L(x))$. Haluttu johtopäätös on $\neg \forall x(A(x) \to G(x))$. Taulutodistus on seuraavanalainen.

1. $T(\forall x(G(x) \to L(x)))$
2. $T(\exists x(A(x) \land W(x)))$
3. $T(\forall x(W(x) \to \neg L(x)))$
4. $E(\neg\forall x(A(x) \to G(x)))$

5. $T(\forall x(A(x) \to G(x)))$

6. $T(A(a) \land W(a))$

7. $T(A(a))$
8. $T(W(a))$

9. $T(A(a) \to G(a))$

10. $E(A(a))$ $\otimes$ | 10. $T(G(a))$

11. $T(W(a) \to \neg L(a))$

12. $E(W(a))$ $\otimes$ | 12. $T(\neg L(a))$

13. $E(L(a))$

14. $T(G(a) \to L(a))$

15. $E(G(a))$ $\otimes$ | 15. $T(L(a))$ $\otimes$

3. Tiedetään, että

1) jos tiili on toisen tiilen päällä, se ei ole pöydällä
2) jokainen tiili on pöydällä tai toisen tiilen päällä ja
3) yksikään tiili ei ole sellaisen tiilen päällä, joka edelleen on jonkun tiilen päällä.

Todista semanttisella taululla, että jos tiili on toisen tiilen päällä, niin jälkimmäisen on oltava pöydällä.

Ratk.
Käytetään formalisoinnissa seuraavia predikaatteja:

$T(x,y) =$ "tiili x on tiilen y päällä" ja
$P(x) =$ "tiili x on pöydällä".

Premissijoukko on formalisoituna seuraavanlainen:

$$\{\forall x\,(\exists y\,T(x,y) \to \neg P(x)),\ \forall x\,(P(x) \vee \exists y\,T(x,y)),$$
$$\forall x \forall y\,(\exists z\,T(y,z) \to \neg T(x,y))\}$$

Haluttu johtopäätös on

$$\forall x \forall y\,(T(x,y) \to P(y))$$

Taulutodistus:

$$1.\ T(\forall x(\exists y Q(x,y) \to \neg P(x)))$$
$$2.\ T(\forall x(P(x) \vee \exists y Q(x,y)))$$
$$3.\ T(\forall x \forall y(\exists z Q(y,z) \to \neg Q(x,y)))$$
$$4.\ E(\forall x \forall y(Q(x,y) \to P(y)))$$
$$5.\ E(\forall y(Q(c,y) \to P(y)))^{4.\ x/c}$$
$$6.\ E(Q(c,d) \to P(d))^{5.\ y/d}$$
$$7.\ T(Q(c,d))^{6.}$$
$$8.\ E(P(d))^{6.}$$
$$9.\ T(P(d) \vee \exists y Q(d,y))$$
$$10.\ T(P(d))^{9.}\ \otimes \qquad 10.\ T(\exists y Q(d,y))^{9.}$$
$$11.\ T(Q(d,e))^{10.\ y/d}$$
$$12.\ T(\exists z Q(d,z) \to \neg Q(c,d))^{3.\ x/c,y/d}$$
$$13.\ E(\exists z Q(d,z))^{12.} \qquad 13.\ T(\neg Q(c,d))^{12.}$$
$$14.\ E(Q(d,e))^{13.\ z/e}\ \otimes \qquad 14.\ E(Q(c,d))^{13.}\ \otimes$$