T-79.144 **Syksy 2004**

Logiikka tietotekniikassa: perusteet

Laskuharjoitus 5 (opetusmoniste, kappaleet 6.1 - 7.3)

7 – 10.10.2004

1. Hae seuraavien lauseiden disjunktiivinen ja konjunktiivinen normaalimuoto (1) muunnossääntöjä käyttäen ja (2) semanttisen taulun avulla.

a) $A \to (B \to C)$

Ratk. Poistetaan lauseesta ensin implikaatiot.

$$
\begin{aligned}
A \to & (B \to C) \\
& \equiv \neg A \vee (\neg B \vee C) \\
& \equiv \neg A \vee \neg B \vee C
\end{aligned}
$$

Näin syntynyt muoto on sekä konjunktiivinen että disjunktiivinen normaalimuoto. Haettaessa disjunktiivista normaalimuotoa semanttisen taulun avulla lähdetään liikkeelle solmusta, jossa lause esiintyy toteteна:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & T(A \to (B \to C)) & & & \\
 \swarrow & & \searrow & & \\
E(A) & & T(B \to C) & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 & E(B) & & T(C) &
\end{array}
$$

Nyt avoimista haaroista saadaan luettua disjunktit. Tässä tapauksessa niissä kussakin on vain 1 literaali. Saadaan siis $\neg A \vee \neg B \vee C$, joka on sama kuin muunnossäännöillä. Konjunktiivinen normaalimuoto haetaan taulusta, jossa juurena on lause epätotena:

$$
\begin{array}{c}
E(A \to (B \to C)) \\
| \\
T(A) \\
| \\
E(B \to C) \\
| \\
T(B) \\
| \\
E(C)
\end{array}
$$

Avoimesta haarasta saadaan lause $A \wedge B \wedge \neg C$, josta saadaan negatoimalla ja De Morganin sääntöä soveltamalla muoto $\neg A \vee \neg B \vee C$, joka on haluttu normaalimuoto.

b) $\neg A \leftrightarrow ((A \vee \neg B) \to B)$
Ratk. Poistetaan lauseesta ensin ekvivalenssi ja implikaatiot:

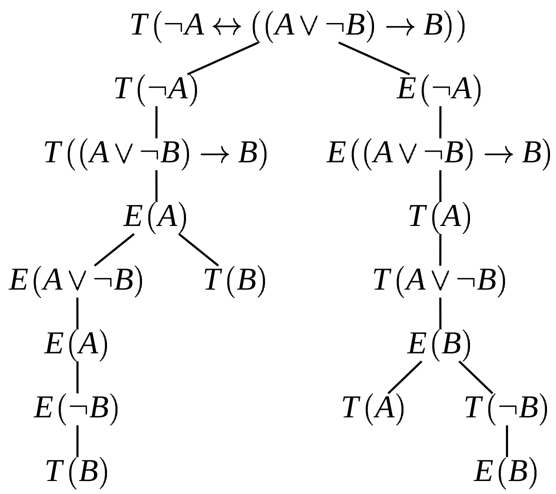
$$\begin{aligned}
&\neg A \leftrightarrow ((A \vee \neg B) \to B) \\
&\quad \equiv (\neg A \to ((A \vee \neg B) \to B)) \wedge (((A \vee \neg B) \to B) \to \neg A) \\
&\quad \equiv (A \vee (\neg (A \vee \neg B) \vee B)) \wedge (\neg (\neg (A \vee \neg B) \vee B) \vee \neg A) \\
&\quad \equiv (A \vee ((\neg A \wedge B) \vee B)) \wedge (((A \vee \neg B) \wedge \neg B) \vee \neg A) \\
&\quad \equiv (A \vee ((\neg A \vee B) \wedge (B \vee B))) \wedge ((A \vee \neg B \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A)) \\
&\quad \equiv (A \vee \neg A \vee B) \wedge (A \vee B) \wedge (A \vee \neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \\
&\quad \equiv (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)
\end{aligned}$$

Tämä on konjunktiivinen normaalimuoto. Käytetään seuraavaksi konjunktion distributiivisuutta disjunktion yli, jolloin päädytään muotoon:

$$\begin{aligned}
&(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \\
&\quad \equiv (A \wedge (\neg A \vee \neg B)) \vee (B \wedge (\neg A \vee \neg B)) \\
&\quad \equiv (A \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (B \wedge \neg B) \\
&\quad \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)
\end{aligned}$$

Viimeisessä vaiheessa on käytetty sievennyssääntöjä, joissa moninkertaiset esiintymät samassa konjunktissa on eliminoitu samoin kuin konjuntit, joissa on esiintynyt sekä literaali, että sen komplementti.

Tarkastelu tauluilla:



Taulusta avoimia haaroja lukemalla saadaan muoto $(A \land \neg B) \lor (\neg A \land B)$, joka on sama kuin muunnossäännöillä. Konjuntiivinen normaalimuoto samalla periaatteella kuin a-kohdassa.

c) $\neg((A \leftrightarrow \neg B) \to C)$

$$
\begin{aligned}
&\neg((A \leftrightarrow \neg B) \to C) \\
&\qquad \equiv \neg((A \to \neg B) \land (\neg B \to A) \to C) && [\leftrightarrow e] \\
&\qquad \equiv \neg(\neg((\neg A \lor \neg B) \land (\neg\neg B \lor A)) \lor C) && [\to e] \\
&\qquad \equiv (\neg A \lor \neg B) \land (A \lor B) \land \neg C \ (*) && [\neg\neg e, DM]
\end{aligned}
$$

Tämä onkin jo konjuntiivinen normaalimuoto. Käytetään seuraavaksi konjunktion distributiivisuutta disjunktion yli:

$$
\begin{aligned}
(*) &\equiv (\neg A \lor \neg B) \land ((B \land \neg C) \lor (A \land \neg C)) \\
&\equiv (\neg A \land ((B \land \neg C) \lor (A \land \neg C))) \lor \\
&\qquad (\neg B \land ((B \land \neg C) \lor (A \land \neg C))) \\
&\equiv (\neg A \land B \land \neg C) \lor (\neg A \land A \land \neg C) \lor \\
&\qquad (\neg B \land B \land \neg C) \lor (\neg B \land A \land \neg C) \\
&\equiv (\neg A \land B \land \neg C) \lor (A \land \neg B \land \neg C)
\end{aligned}
$$

Lause on disjunktiivisessa normaalimuodossa. Viimeisessä vaiheessa on jätetty loogisesti epätodet literaalien konjuktiot pois (ts. ne, joissa esintyy jokin atominen lause ja sen negaatio).

d) $P_1 \land P_2 \leftrightarrow (P_1 \to P_2) \lor (P_2 \to P_3)$

Ratk.

Tehtävän laadinnassa kävi sikäli mielenkiintoisesti, että ekvivalenssin oikealla puolella oleva termi on pätevä. Nyt analyysi voidaan tehdä, korvaamalla se aina todella lauseella $\top$. Saadaan:

$$
\begin{aligned}
&P_1 \wedge P_2 \leftrightarrow \top \\
&\quad \equiv (P_1 \wedge P_2 \to \top) \wedge (\top \to P_1 \wedge P_2) \\
&\quad \equiv (\neg(P_1 \wedge P_2) \vee \top) \wedge (\neg\top \vee (P_1 \wedge P_2)) \\
&\quad \equiv (\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \top) \wedge (\bot \vee P_1) \wedge (\bot \vee P_2) \\
&\quad \equiv P_1 \wedge P_2
\end{aligned}
$$

Nyt sievennyssääntöjä voi soveltaa siten, että ensimmäinen konjunkti on aina tosi ja kahdessa viimeisessä ensimmäiset termit voi poistaa, koska ne ovat aina epätosia. Syntynyt tulos on sekä KNM että DNM.

3. Hae KNM:t seuraaville lauseille muunnossäännöillä ja semantisella taululla.

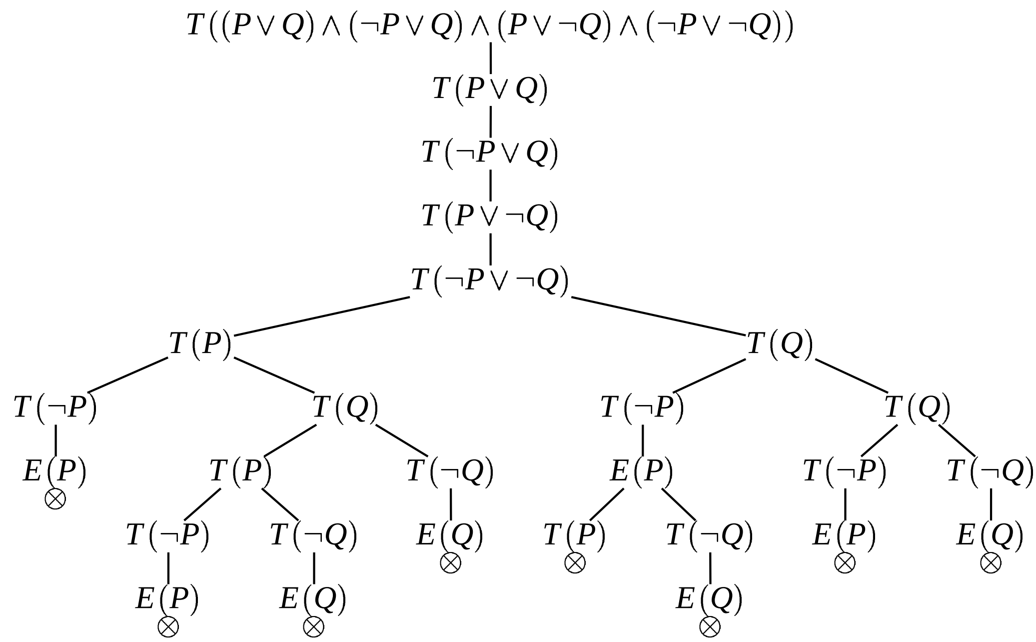
a) $(P \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg Q)$
Ratk. Muuntamisessa käytetään disjunktion distributiivisuutta konjunktion yli:

$$
\begin{aligned}
&(P \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg Q) \\
&\quad \equiv ((P \wedge \neg P) \vee Q) \wedge ((P \wedge \neg P) \vee \neg Q) \\
&\quad \equiv (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)
\end{aligned}
$$

b) $(P_1 \wedge \neg P_1) \vee \cdots \vee (P_n \wedge \neg P_n)$
Ratk. Muuntaminen etenee samoilla säännöillä. Kuten a)-kohdassakin, lopputulokseen tulevat kaikki kombinaatiot (2^n) totuusarvoille:

$$
\begin{aligned}
&(P_1 \wedge \neg P_1) \ldots (P_n \wedge \neg P_n) \\
&\quad \equiv (P_1 \vee \cdots \vee P_n) \wedge (\neg P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n) \wedge (\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n)
\end{aligned}
$$

c) Osoita semanttisella taululla, että a)-kohdassa muodostettu KNM on toteutumaton.
Ratk. Osoittaminen tapahtuu lähtemällä liikkeelle semanttisesta taulusta, jonka juuressa on lause todeksi asetettuna. Jos lause on toteutumaton, taulu on ristiriitainen.



4. Hae lauseelle $(A\to((A\to A)\to A))\to((A\to(A\to A))\to(A\to A))$ klausuuliesitys.

Ratk. Lähdetään poistamaan implikaatiot:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & (A\to((A\to A)\to A)) & \to & ((A\to(A\to A))\to(A\to A)) \\
\equiv & \neg(A\to((A\to A)\to A)) & \vee & ((A\to(A\to A))\to(A\to A)) \\
\equiv & \neg(\neg A\vee((A\to A)\to A)) & \vee & ((\neg A\vee(A\to A))\to(A\to A)) \\
\equiv & \neg(\neg A\vee(\neg(\neg A\vee A)\vee A)) & \vee & (\neg(\neg A\vee(\neg A\vee A))\vee(\neg A\vee A))
\end{array}
$$

Edelleen viedään negaatiot atomilauseiden eteen:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \neg(\neg A\vee(\neg(\neg A\vee A)\vee A)) & \vee & (\neg(\neg A\vee(\neg A\vee A))\vee(\neg A\vee A)) \\
\equiv & (\neg\neg A\wedge\neg(\neg(\neg A\vee A)\vee A)) & \vee & ((\neg\neg A\wedge\neg(\neg A\vee A))\vee(\neg A\vee A)) \\
\equiv & (A\wedge(\neg\neg(\neg A\vee A)\wedge\neg A)) & \vee & ((A\wedge\neg(\neg A\vee A))\vee(\neg A\vee A)) \\
\equiv & (A\wedge((\neg A\vee A)\wedge\neg A)) & \vee & ((A\wedge(A\wedge\neg A))\vee(\neg A\vee A))
\end{array}
$$

Siirretään distribuutiosäännöillä disjunktiot sisään ja konjunktiot ulos:

$$
\begin{array}{rlcl}
 & (A\wedge((\neg A\vee A)\wedge\neg A)) & \vee & ((A\wedge(A\wedge\neg A))\vee(\neg A\vee A)) \\
\equiv & (A\wedge((\neg A\vee A)\wedge\neg A)) & \vee & ((A\vee(\neg A\vee A))\wedge((A\wedge\neg A)\vee(\neg A\vee A))) \\
\equiv & (A\wedge((\neg A\vee A)\wedge\neg A)) & \vee & ((A\vee\neg A\vee A)\wedge(A\vee\neg A\vee A)\wedge(\neg A\vee\neg A\vee A))
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\equiv\ & (A \vee ((A \vee \neg A \vee A) \wedge (A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg A \vee A)) \wedge \\
& (\neg A \vee A) \wedge \neg A) \vee ((A \vee \neg A \vee A) \wedge (A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg A \vee A)) \\
\equiv\ & (A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge (A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge (A \vee \neg A \vee \neg A \vee A) \wedge \\
& (\neg A \vee A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge \\
& (\neg A \vee A \vee \neg A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge \\
& (\neg A \vee \neg A \vee \neg A \vee A)
\end{aligned}
$$

Kun tulokseen sovelletaan normaalimuotojen sievennyssääntöä, jossa poistetaan disjunktiot, joissa esiintyy literaali ja sen komplementti, havaitaan, että kaikki syntyneet 9 klausuulia eliminoituvat. Tuloksena saatava klausuulijoukko on siis tyhjä ($\emptyset$), ja on siten aina tosi. Tämä korreloi hienosti sen kanssa, että annettu lause on pätevä (voi tarkistaa esim. semanttisella taululla).

5. Tarkastellaan klausuulijoukkoa:

$$
\begin{aligned}
S \ = \ & \{\{A_0, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{A_1, A_2\}, \{\neg A_1, \neg A_2\}, \ldots, \\
& \{A_{n-1}, A_n\}, \{\neg A_{n-1}, \neg A_n\}, \{A_n, A_0\}, \{\neg A_n, \neg A_0\}\}
\end{aligned}
$$

Anna totuusjakelu $\mathcal{A}$ siten, että $\mathcal{A} \models S$.

Ratk.

Tarkastellaan joukon S kahta ensimmäistä klausuulia. Ne voidaan kaavana kirjoittaa muodossa $(A_0 \vee A_1) \wedge (\neg A_0 \vee \neg A_1)$. Tällä lauseella on mallit $\mathcal{A}_1 = \{A_0\}$ ja $\mathcal{A}_2 = \{A_1\}$, eli se kuvaa ehdoton tai operaatiota (XOR). Näin ollen koko joukko kuvaa kaavaa:

$$
(A_0 \underline{\vee} A_1) \wedge (A_1 \underline{\vee} A_2) \wedge \cdots \wedge (A_n \underline{\vee} A_0)
$$

Tarkastellaan kaavaa n:n kahdella arvolla. Kun $n = 1$ lause saa muodon $(A_0 \underline{\vee} A_1) \wedge (A_1 \underline{\vee} A_0)$. Kun tässä valitaan A_0 todeksi, seuraa siitä, että A_1 on epätosi. Nyt molemmat konjunktit toteutuvat. Vastaavasti kun valitaan A_0 epätodeksi.

Nyt jos $n = 2$, kaava on muotoa $(A_0 \underline{\vee} A_1) \wedge (A_1 \underline{\vee} A_2) \wedge (A_2 \underline{\vee} A_0)$. Jos tässä valitsee A_0:n todeksi, seuraa siitä, että A_1 on epätosi ja taas A_2 tosi. Nyt viimeinen ehdoton tai kuitenkin edellyttäisi toteutuakseen, että A_0 on epätosi. Tämä aiheuttaa ristiriidan ja näin ei saada mallia. Jos A_0 valittiin aluksi epätodeksi, syntyy samanlainen ristiriita. Näin ollen tässä tapauksessa joukolla ei ole mallia.

Tarkastelun voi yleistää siten, että jos n on pariton saadaan edellämainitulla tekniikalla 2 mallia ja jos n on parillinen, ei malleja ole.

6. Horn-klausuuli on klausuuli, jossa on täsmälleen yksi positiivinen literaali. Olkoon $\mathcal{A}_1$ ja $\mathcal{A}_2$ Horn-klausuulien joukon S malleja. Osoita, että myös $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ on S:n malli.

Ratk.
Todistus ristiriidan kautta. Oletetaan $\mathcal{A} \not\models S$. Tällöin joukossa S on klausuuli $\{A, \neg B_1, \ldots, \neg B_2\}$, joka ei toteudu. Jotta näin olisi, pitää olla $\{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq \mathcal{A}$ ja $A \notin \mathcal{A}$. Joukko-opillisen leikkauksen määritelmän mukaan pitää myös olla $\{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq \mathcal{A}_1$ ja $\{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq \mathcal{A}_2$. Koska $\mathcal{A}_1$ ja $\mathcal{A}_2$ ovat klausuulijoukon S malleja, pitää olla myös $A \in \mathcal{A}_1$ ja $A \in \mathcal{A}_2$. Tällöin kuitenkin $A \in \mathcal{A}$ leikkauksen määritelmän perusteella, ja tämä aiheuttaa ristiriidan. Siis $\mathcal{A} \models S$. $\square$