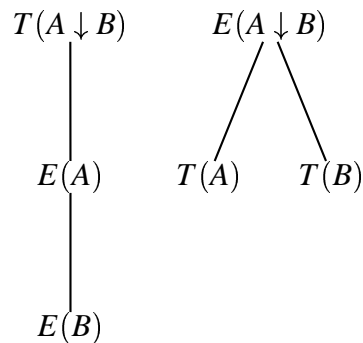


1. Peircen nuoli määritellään seuraavasti:

$$(A \downarrow B) \Leftrightarrow_{def} \neg A \wedge \neg B.$$

Määrittele sille semanttisen taulun säännöt.



2. Todista semanttisella taululla

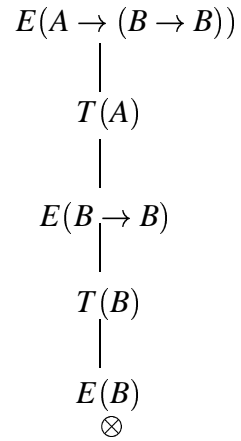
- $A \rightarrow (B \rightarrow B)$,
- $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$,
- $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)$ ja
- $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (A \vee B) \rightarrow C$.

Todistettavien kaavojen negaatioille konstruoidaan semanttiset taulut. Taulun kaikkien haarojen tulee sulkeutua, jotta taulun juuressa $F(\phi)$ oleva lause ϕ on pätevä. Jos taulun haara sulkeutuu ennen koko puun valmistumista, kyseistä haaraa ei enää laajenneta sääntöjä sovellettaessa.

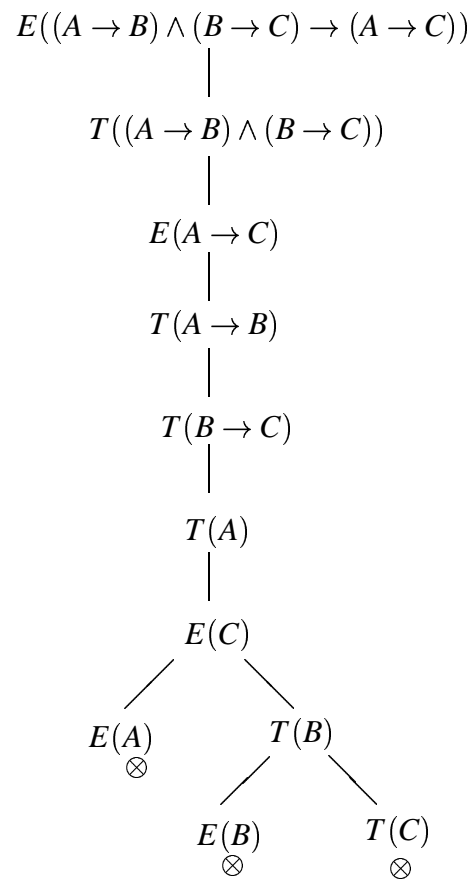
Huomaa, että semanttista taulua käytetään itse asiassa lauseen $\neg\phi$ mallien selvittämiseen. Jos taulun kaikki haarat menevät ristiriitaisiksi lauseella $\neg\phi$ ei ole mallia (eli $\neg\phi$ on toteutumaton), joten lause ϕ pätevä.

Ratk.

a) $A \rightarrow (B \rightarrow B)$:



b) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$:



c) $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)$:

$$E((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$$

$$T((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C))$$

$$E(A \rightarrow B \wedge C)$$

$$T(A \rightarrow B)$$

$$T(A \rightarrow C)$$

$$T(A)$$

$$E(B \wedge C)$$

$$E(A)$$

⊗

$$T(B)$$

$$E(B)$$

⊗

$$E(C)$$

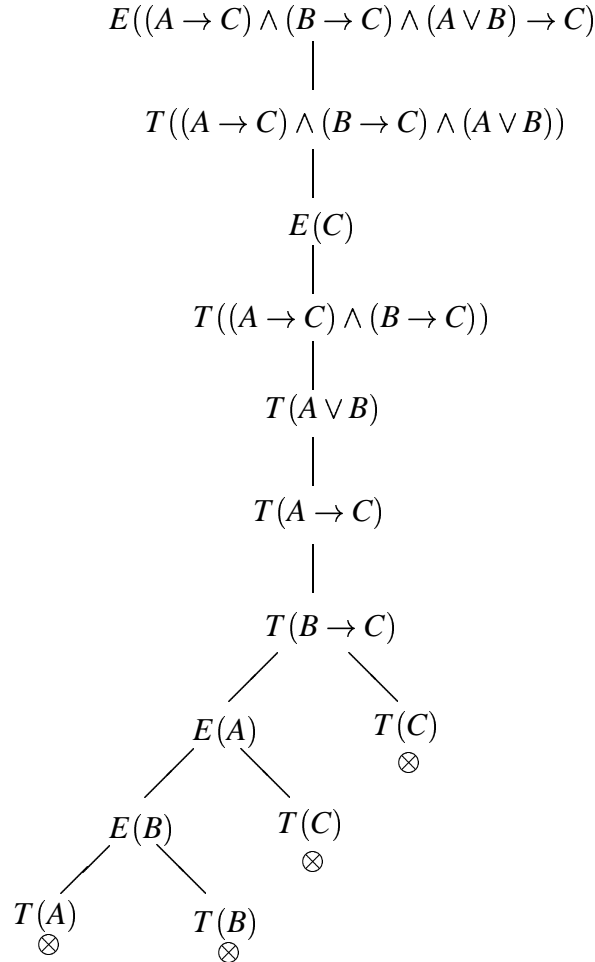
$$E(A)$$

⊗

$$T(C)$$

⊗

d) $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (A \vee B) \rightarrow C$:



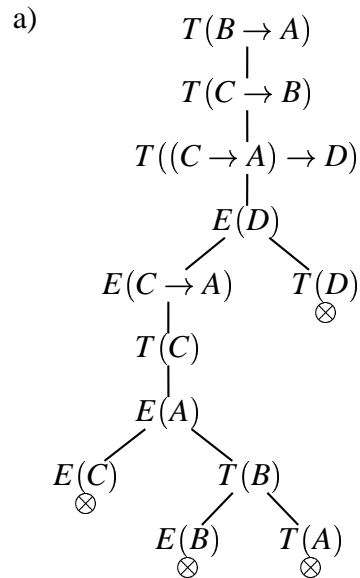
3. Tutki semanttisella taululla, pitääkö annettu väittämä paikkansa. Jos ei, anna perusteluksi totuusjako, jossa se ei ole tosi (vastaesimerkki).

- a) $\{B \rightarrow A, C \rightarrow B, (C \rightarrow A) \rightarrow D\} \models D$
- b) $\{A \rightarrow C, A \vee B, \neg D \rightarrow \neg B\} \models C \rightarrow D$
- c) $\models (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))$
- d) $\models (\neg B \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \vee C))$

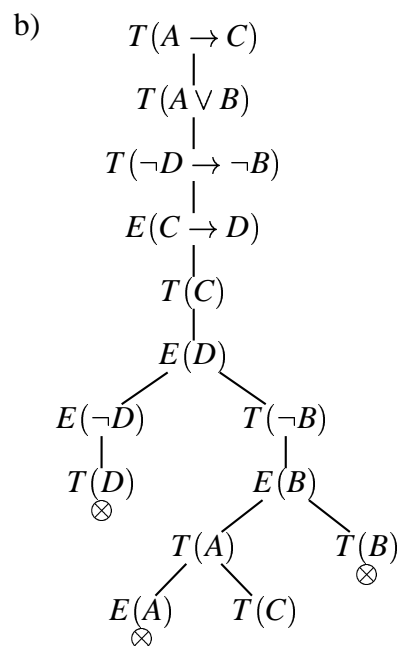
Ratk.

Loogista seuraavuutta tutkittaessa asetetaan taulun juureen kaikki lausejoukon lauseet totena ja tutkittava lause epätotena. Mikäli nyt kaikki puun haarat sulkeutuvat ristiriidan takia, tiedetään että tutkittava lause ei voi olla

epätosi, mikäli kaikki lausejoukon lauseet ovat tosia, joten lause on looginen seuraavuus lausejoukosta.

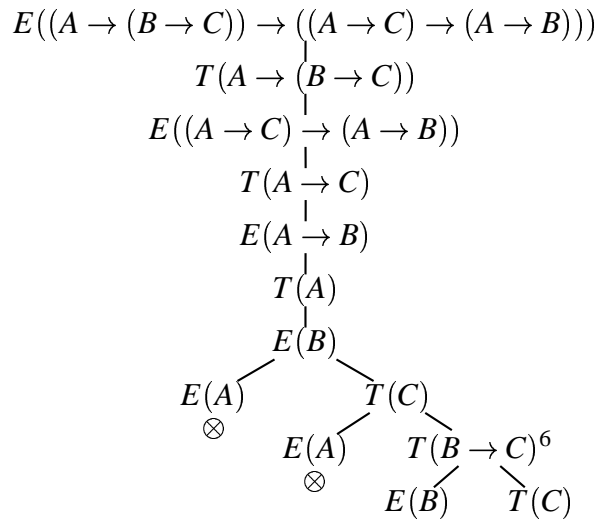


Koska taulu sulkeutui, on D looginen seuraus lausejoukosta.



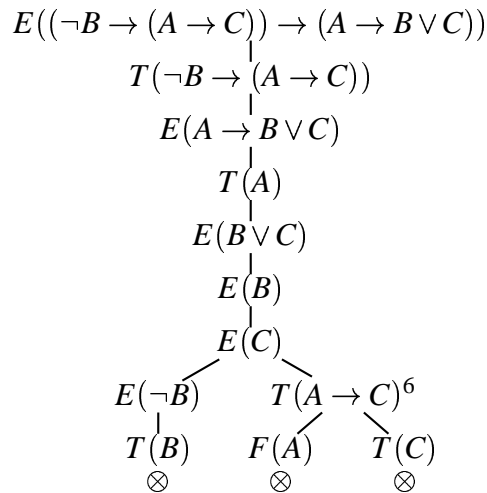
Taulu ei sulkeutunut, joten $C \rightarrow D$ ei ole looginen seuraavuus lausejoukosta. Puun aukiolevasta haarasta voidaan lukea vastaesimerkki, saadaan totuusjako $\mathcal{A} = \{A, C\}$.

c) **Ratk.** Merkintä $\models \phi$ tarkoittaa siis, että lause ϕ on pätevä. Todistus siis tapahtuu konstruoimalla puu, jonka juuressa on lauseen negaatio.



Koska taulu ei sulkeutunut, lause ei ole pätevä. Vastamalli voidaan lukea avoimesta haarasta, tässä tapauksessa esim. oikeimmasta saadaan totuusjako $\mathcal{A} = \{A, C\}$.

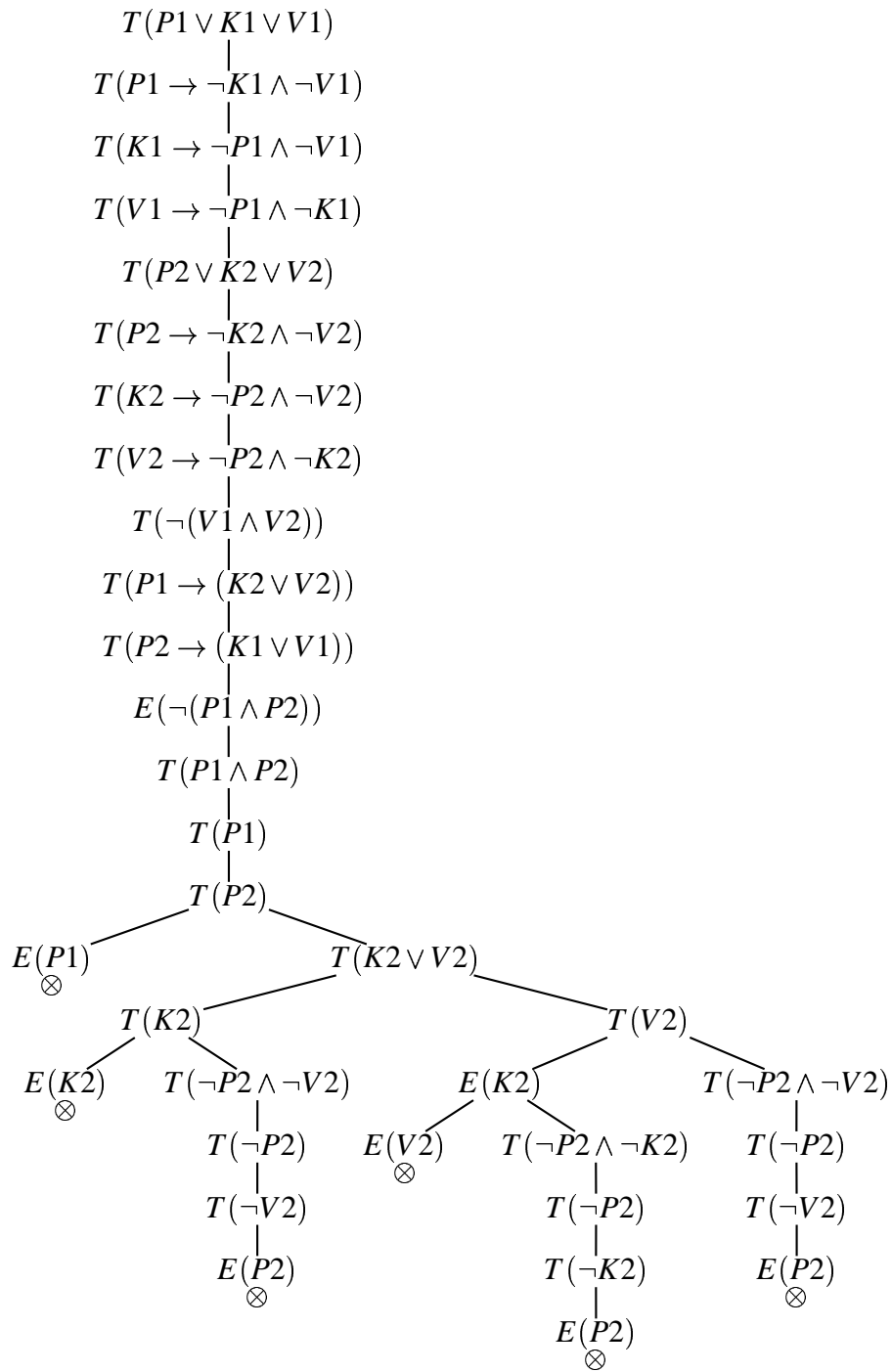
d) **Ratk.**



Taulu sulkeutui, joten lause on pätevä.

4. Palataan insinööri Sörsselssönin laatimiin vaatimukseen liikennevaloille yksisuuntaisten katujen risteyksessä. Osoita semanttisella taululla, että väittämä “liikennevalojen punaiset lamput eivät pala yhtäaikaaisesti” seuraa loogisesti laatimastasi lausejoukosta.

Ratk.



5. Osoita Hilbertin ja Suppesin todistusjärjestelmillä (opetusmoniste, kappaleet 5.1 ja 5.2) seuraavat väittämät.

a) $\vdash P \rightarrow P$

Ratk. (Hilbert)

1. $(P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P))$ [A1]
2. $((P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P)) \rightarrow ((P \rightarrow (P \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow P)))$ [A2]
3. $((P \rightarrow (P \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow P))$ [MP:1,2]
4. $(P \rightarrow (P \rightarrow P))$ [A1]
5. $(P \rightarrow P)$ [MP:3,4]

(Suppes)

1. P [apuoletus]
2. $\neg\neg P$ [KNT]
3. P [KNE]
4. $P \rightarrow P$ [ET:1,3]

b) $\{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R\} \vdash P \rightarrow R$

Ratk. (Hilbert)

1. $(Q \rightarrow R)$ [P2]
2. $((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R)))$ [A1]
3. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ [MP:1,2]
4. $((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)))$ [A2]
5. $((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$ [MP:3,4]
6. $(P \rightarrow Q)$ [P1]
7. $(P \rightarrow R)$ [MP:5,6]

(Suppes)

1. $P \rightarrow Q$ [P1]
2. $Q \rightarrow R$ [P2]
3. P [apuoletus]
4. Q [MP:3,2]
5. R [MP:4,3]
6. $P \rightarrow R$ [ET:3,5]

c) $\{P, Q \rightarrow (P \rightarrow R)\} \vdash Q \rightarrow R$

Ratk. (Hilbert)

1. P [P1]
2. $(Q \rightarrow (P \rightarrow R))$ [P2]
3. $(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$ [A1]
4. $(Q \rightarrow P)$ [MP:1,3]
5. $((Q \rightarrow (P \rightarrow R)) \rightarrow ((Q \rightarrow P) \rightarrow (Q \rightarrow R)))$ [A2]
6. $((Q \rightarrow P) \rightarrow (Q \rightarrow R))$ [MP:2,5]
7. $(Q \rightarrow R)$ [MP:4,6]

(Suppes)

1. P [P1]
2. $Q \rightarrow (P \rightarrow R)$ [P2]
3. Q [apuoletus]
4. $P \rightarrow R$ [MP:3,2]
5. R [MP:1,4]
6. $Q \rightarrow R$ [ET:3,5]