T-79.144 **Syksy 2004**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 11 (opetusmoniste, kappaleet 6.1 – 8.4)
23 – 26.11.2004

1. Määritä klausuulijoukkojen

a) $\{\{\neg G(x,c)\}\}$,

b) $\{\{P(f(y),y)\}\}$,

c) $\{\{P(x)\},\ \{\neg P(a),\neg P(b)\}\}$,

d) $\{\{\neg P(x,y),\ \neg P(y,z),\ G(x,z)\}\}$,

e) $\{\{\neg P(x,y)\},\ \{Q(a,x),\ Q(b,f(y))\}\}$ ja

f) $\{\{P(x),\ Q(f(x,y))\}\}$

Herbrand-universumit ja kannat.

Ratk.
Herbrand-universumi U muodostuu termeistä, jotka ovat konstruoitavissa klausuulijoukossa esiintyvistä vakio- ja funktiosymboleista. Jos klausuulijoukossa ei ole vakiosymboleita, universumiin otetaan jokin vakiosymboli, esimerkiksi a (näin tapahtuu kohdissa (b), (d) ja (f)). Herbrand-kanta B puolestaan muodostuu atomisista lauseista, jotka ovat konstruoitavissa klausuulijoukossa esiintyvistä predikaattisymboleista käyttämällä argumentteina Herbrand-universumin U termejä.

a) $U=\{c\}, B=\{G(c,c)\}$.

b) $U=\{a,f(a),f(f(a)),\ldots\}, B=\{P(e_1,e_2)\,|\,e_1\in U,e_2\in U\}$.

c) $U=\{a,b\}, B=\{P(a),P(b)\}$.

d) $U=\{a\}, B=\{P(a,a),G(a,a)\}$.

e) $U=\{a,b,f(a),f(b),f(f(a)),f(f(b)),\ldots\}$,
$B=\{P(e_1,e_2)\,|\,e_1\in U,e_2\in U\}\cup\{Q(e_1,e_2)\,|\,e_1\in U,e_2\in U\}$.

f) $U=\{a,f(a,a),f(a,f(a,a)),f(f(a,a),a),f(f(a,a),f(a,a)),\ldots\}$,
$B=\{P(e)\,|\,e\in U\}\cup\{Q(e)\,|\,e\in U\}$.

2. Tarkastellaan kaavajoukkoa

$$\Sigma=\{\forall xP(x,a,x),\ \neg\exists x\exists y\exists z(P(x,y,z)\wedge\neg P(x,f(y),f(z)))\}$$

a) Muunna Σ klausuulijoukoksi S.

b) Anna S:n Herbrand-universumi H sekä Herbrand-kanta B.

c) Esitetään Herbrand-struktuurit Herbrand-kannan osajoukkoina. Hae S:lle osajoukkorelaatioon, $\subseteq$, nähden minimaalinen ja maksimaalinen Herbrand-malli.

3. Muunna ongelma predikaattilogiikan lauseen

$$\exists x \exists y (P(x) \leftrightarrow \neg P(y)) \to \exists x \exists y (\neg P(x) \land P(y))$$

pätevyyden selvittämisestä lauselogiikan toteutuvuusongelmaksi ja ratkaise ongelma lauselogiikan menetelmin.

4. Laadi substituutioiden $\{x/y, y/b, z/f(x)\}$ ja $\{x/g(a), y/x, w/c\}$ kompositio.

Ratk.
Substituutioita kompositoitaessa on kiinnitettävä huomiota kahteen asiaan:

- Mikäli tulos olisi muotoa x/x, sitä ei kirjata lopputulokseen.
- Jos jälkimmäinen substituutio korvaa samaa muuttujaa kuin edellinen, korvaus suoritetaan ensimmäisen substituution perusteella.

Näin saadaan:

$$\{y/b, z/f(g(a)), w/c\}$$

5. Mitkä ovat seuraavien literaalijoukkojen yleisimmät unifioijat?

a) $\{P(x, g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$

b) $\{P(x, f(x), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$

c) $\{P(x, f(x, y)), P(y, f(y, a)), P(b, f(b, a))\}$

d) $\{P(f(a), y, z), P(y, f(a), b), P(x, y, f(z))\}$

Ratk.
Sovelletaan unifikaatioalgoritmia vaiheittain:

a) $\sigma_0 = \varepsilon$ (tyhjä substituutio)
$S_0 = \{P(x, g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$
$D(S_0) = \{x, f(y)\}$
$\sigma_1 = \{x/f(y)\}$
$\sigma_0\sigma_1 = \{x/f(y)\}$
$S_1 = \{P(f(y), g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$
$D(S_1) = \{y, f(z)\}$

$\sigma_2 = \{y/f(z)\}$
$\sigma_0\sigma_1\sigma_2 = \{x/f(f(z)), y/f(z)\}$
$S_2 = \{P(f(f(z)), g(f(z)), f(a)), P(f(f(z)), g(f(z)), z)\}$
$D(S_2) = \{f(a), z\}$
$\sigma_3 = \{z/f(a)\}$
$\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \{x/f(f(f(a))), y/f(f(a)), z/f(a)\}$
$S_3 = \{P(f(f(f(a))), g(f(f(a))), f(a))\}$
Unifiointi onnistui, yleisin unifioija on $\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

b) $\sigma_0 = \varepsilon$
$S_0 = \{P(x, f(x), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
$D(S_0) = \{x, a, y\}$
$\sigma_1 = \{x/a\}$
$S_1 = \{P(a, f(a), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
$D(S_1) = \{a, y\}$
$\sigma_2 = \{y/a\}$
$S_2 = \{P(a, f(a), g(a)), P(a, f(g(a)), g(a))\}$
$D(S_2) = \{a, g(a)\}$
Termit a ja $g(a)$ eivät unifioidu; unifiointi ei siis onnistu.

c) $\sigma_0 = \varepsilon$
$S_0 = \{P(x, f(x, y)), P(y, f(y, a)), P(b, f(b, a))\}$
$D(S_0) = \{x, y, b\}$
$\sigma_1 = \{x/b\}$
$S_1 = \{P(b, f(b, y)), P(y, f(y, a)), P(b, f(b, a))\}$
$D(S_1) = \{b, y\}$
$\sigma_2 = \{y/b\}$
$S_2 = \{P(b, f(b, b)), P(b, f(b, a))\}$
$D(S_2) = \{b, a\}$
Termit b ja a eivät unifioidu; unifiointi ei onnistu.

d) $\sigma_0 = \varepsilon$
$S_0 = \{P(f(a), y, z), P(y, f(a), b), P(x, y, f(z))\}$
$D(S_0) = \{f(a), y, x\}$
$\sigma_1 = \{y/f(a)\}$
$S_1 = \{P(f(a), f(a), z), P(f(a), f(a), b), P(x, f(a), f(z))\}$
$D(S_1) = \{f(a), x\}$
$\sigma_2 = \{x/f(a)\}$
$S_2 = \{P(f(a), f(a), z), P(f(a), f(a), b), P(f(a), f(a), f(z))\}$
$D(S_2) = \{z, b, f(z)\}$ (z:aa ei voi korvata $f(z)$:lla)
$\sigma_3 = \{z/b\}$
$S_3 = \{P(f(a), f(a), b), P(f(a), f(a), f(b))\}$
$D(S_3) = \{b, f(b)\}$

Termit b ja $f(b)$ eivät unifioidu; unifiointi ei onnistu.

6. Osoita, että

a) substituutioiden kompositio ei ole kommutatiivinen, eli että on olemassa substituutiot σ ja λ s.e. $\sigma\lambda \neq \lambda\sigma$.

b) yleisimmät unifioijat eivät ole yksikäsitteiset, eli että jollekin lausejoukolle S on olemassa kaksi yleisintä unifioijaa, σ ja λ, s.e. $\sigma \neq \lambda$.

Ratk.

a) Olkoon $\sigma = \{x/a\}$ ja $\lambda = \{x/b\}$.

b) Lausejoukolle $S = \{P(x), P(y)\}$ saadaan yleisimmät unifioijat $\{x/y\}$ ja $\{y/x\}$.

7. Unifioi $\{P(x,y,z), P(f(w,w), f(x,x), f(y,y))\}$.

8. Todista resoluutiolla, että ei ole olemassa miesparturia, kun:

a) Jokainen parturi ajaa niiden miesten parrat, jotka eivät itse aja partaansa.

b) Kukaan parturi ei aja niiden miesten partoja, jotka ajavat itse partansa.

Kuvitellaan, että universumi koostuu joukosta miehiä. Käytetään formalisoinnissa seuraavia predikaatteja: $P(x)$ = "x on parturi" ja $A(x,y)$ = "x ajaa y:n parran".

a) $\forall x(P(x) \to \forall y(\neg A(y,y) \to A(x,y)))$,

b) $\forall x(P(x) \to \forall y(A(y,y) \to \neg A(x,y)))$.

Muodostetaan klausuulit:

a) $\forall x(P(x) \to \forall y(\neg A(y,y) \to A(x,y)))$
$\forall x(\neg P(x) \vee \forall y(A(y,y) \vee A(x,y)))$
$\forall x \forall y(\neg P(x) \vee A(y,y) \vee A(x,y))$
$\neg P(x) \vee A(y,y) \vee A(x,y)$
$\{\neg P(x_1),\ A(y_1,y_1),\ A(x_1,y_1)\}$

b) $\forall x(P(x) \to \forall y(A(y,y) \to \neg A(x,y)))$
$\forall x(\neg P(x) \vee \forall y(\neg A(y,y) \vee \neg A(x,y)))$
$\forall x \forall y(\neg P(x) \vee \neg A(y,y) \vee \neg A(x,y))$
$\neg P(x) \vee \neg A(y,y) \vee \neg A(x,y)$
$\{\neg P(x_2),\ \neg A(y_2,y_2),\ \neg A(x_2,y_2)\}$

Halutaan todistaa $\neg\exists x P(x)$ ja siksi muodostetaan lauseen negaatio $\exists x P(x)$. Tämä lause muutetaan klausuulimuotoon $\{P(a)\}$.

Klausuuleista

$$\{\neg P(x_1),\, A(y_1,y_1),\, A(x_1,y_1)\} \qquad \text{ja} \qquad \{\neg P(x_2),\, \neg A(y_2,y_2),\, \neg A(x_2,y_2)\}$$

saadaan

$$\{\neg P(x_3)\} \qquad (\text{substituutio } \{x_1/x_3, x_2/x_3, y_1/x_3, y_2/x_3\})$$

Klausuuleista $\{P(a)\}$ ja $\{\neg P(x_3)\}$ saadaan tyhjä klausuuli (substituutio $\{x_3/a\}$). Täten klausuulijoukko on toteutumaton ja $\neg\exists x P(x)$ seuraa loogisesti premisseistä.

9. Esitetään luonnolliset luvut $0, 1, 2, \ldots$ muuttujattomilla termeillä 0, $s(0)$, $s(s(0)), \ldots$, jotka rakentuvat vakiosymbolista 0 ja funktiosymbolista s, joka tulkitaan funktioksi $s(x) = x + 1$ luonnollisille luvuille x.

a) Tarkoittakoon predikaatit $J2(x), J3(x)$ ja $J6(x)$ sitä, että luonnollinen luku x on jaollinen kahdella, kolmella ja kuudella. Määrittele nämä predikaatit predikaattilogiikan lausein siten, että predikaatin $J6$ määritelmä perustuu predikaattien $J2$ ja $J3$ määritelmiin.

b) Todista resoluutiolla, että jos luonnollinen luku x on kahdella ja kolmella jaollinen, niin luonnollinen luku $x + 6$ on kuudella jaollinen.

Ratk.
Todetaan ensin perustapaukset, s.o. että 0 on kahdella ja kolmella jaollinen.

$$J2(0)$$
$$J3(0)$$

Edelleen, kuinka näistä päätellään jaollisuus suuremmille luvuille:

$$\forall x(J2(x) \to J2(s(s(x))))$$
$$\forall x(J3(x) \to J2(s(s(s(x)))))$$

Ja lopuksi määritellään kuudella jaollisuus:

$$\forall x(J2(x) \land J3(x) \to J6(x))$$

Jotta resoluutiota voisi soveltaa, tulee lauseet muuttaa klausuulimuotoon. Tässä tapauksessa se on melko suoraviivaista.

$$\forall x(J2(x) \rightarrow J2(s(s(x))))$$
$$\forall x(\neg J2(x) \vee J2(s(s(x)))$$
$$\{\neg J2(x), J2(s(s(x)))\}$$

Samoin $J3(x)$-predikaatin määrittelevälle lauseelle saadaan $\{\neg J3(x), J3(s(s(s(x))))\}$. Edelleen $J6(x)$:n määrittelevä lause saadaan muotoon:

$$\forall x(J2(x) \wedge J3(x) \rightarrow J6(x))$$
$$\forall x(\neg(J2(x) \wedge J3(x)) \vee J6(x))$$
$$\forall x(\neg J2(x) \vee \neg J3(x) \vee J6(x))$$
$$\{\neg J2(x), \neg J3(x), J6(x)\}$$

Kyselyn negaatiosta tulee seuraavat 3 klausuulia:

$$\neg\forall(J2(x) \wedge J3(x) \rightarrow J6(s^6(x)))$$
$$\neg\forall(\neg(J2(x) \wedge J3(x)) \vee J6(s^6(x)))$$
$$\neg\forall(\neg J2(x) \vee \neg J3(x)) \vee J6(s^6(x)))$$
$$\exists\neg(\neg J2(x) \vee \neg J3(x) \vee J6(s^6(x)))$$
$$\exists J2(x) \wedge J3(x) \wedge \neg J6(s^6(x))$$
$$\{J2(c)\}, \{J3(c)\} \text{ ja } \{\neg J6(s^6(c)\}$$

Resoluutio laaditaan seuraavasti:

1. $\{J2(c)\}$, P
2. $\{\neg J2(x_1), J2(s(s(x_1)))\}$, P
3. $\{J2(s(s(c)))\}$, 1 & 2, x_1/c
4. $\{\neg J2(x_2), J2(s(s(x_2)))\}$, P
5. $\{J2(s^4(c))\}$, 3 & 4, $x_2/s(s(c))$
6. $\{\neg J2(x_3), J2(s(s(x_3)))\}$, P
7. $\{J2(s^6(c))\}$, 5 & 6, $x_3/s^6(c)$
8. $\{J3(c)\}$, P

9. $\{\neg J2(x_4), J3(s(s(s(x_4))))\}$, P
10. $\{J3(s(s(s(c))))\}$, 7 & 8, x_4/c
11. $\{\neg J2(x_5), J3(s(s(s(x_5))))\}$, P
12. $\{J3(s^6(c))\}$, 9 & 10, $x_4/s(s(s(c)))$
13. $\{\neg J2(x_6), \neg J3(x_6), J6(x_6)\}$, P
14. $\{\neg J3(s^6(c)), J6(s^6(c))\}$, 7 & 13, $x_6/s^6(c)$
15. $\{J6(s^6(c))\}$, 12 & 14
16. $\{\neg J6(s^6(c))\}$, P
17. $\square$, 16 & 17

Resoluutiosta saatiin tyhjä klausuuli, so. väite pitää paikkansa.