T-79.144 **Syksy 2003**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 9 (opetusmoniste, kappaleet 3.5 - 5.2)
4 – 7.11.2003

1. Osoita, että seuraavat lauseet eivät ole päteviä konstruoimalla struktuuri, jossa lause on epätosi (vastamalli).

a) $\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists y \forall x P(x,y)$

b) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

c) $\neg \forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \vee \neg \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(x))$

Ratk.

a) Olkoon $U = \{1,2\}$ ja $P^S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$. Nyt $\forall x \exists y P(x,y)$ on tosi (kummallekin alkiolle 1. positiossa löytyy vastine). Toisaalta $\exists y \forall x P(x,y)$ ei ole tosi koska predikaatin P tulkinnassa ei ole sellaista alkiota 2. positiossa, jolle löytyisi parit siten, että molemmat alkiot esiintyisivät 1. positiossa. Näin ollen implikaatio on epätosi.

b) Olkoon $U = \{1\}$ ja $P^S = \{1\}, Q^S = \emptyset$. Nyt implikaation vasen puoli on tosi ja oikea epätosi ja struktuuri näin vastaesimerkki.

c) Lauseessa pitäisi saada disjunktio epätodeksi. Tämä edellyttää, että molemmat disjunktit ovat epätosia. Koska niiden edessä on negaatio, pitää siis molemmilla puolilla negaatioiden sisällä olevien lauseiden olla tosia.

Olkoon $U = \{1\}$ ja $P^S = \emptyset, R^S = \{1\}$. Nyt $\forall x(P(x) \rightarrow R(x))$ on tosi, implikaation vasen puoli on epätosi. Samalla argumentilla $\forall x(P(x) \rightarrow \neg R(x))$ on tosi. Näiden vaatimusten voidaan ajatella kuvaavan osajoukkorelaatiota. Ensimäisessä tapauksessa P:n tulkinnan tulisi olla R:n tulkinnan osajoukko ja toisessa R:n tulkinnan komplementin osajoukko. Ainoa joukko, joka molemmat vaatimukset täyttää on tyhjä joukko, joka siis on asetettu P:n tulkinnaksi. R:n tulkinta voidaan itse asiassa valita vapaasti.

2. Muunna seuraavat lauseet konjunktiiviseen normaalimuotoon ja suorita skolemointi.

a) $\forall y(\exists x P(x,y) \rightarrow Q(y,z)) \wedge \exists y(\forall x R(x,y) \vee Q(x,y))$.

b) $\exists x R(x,y) \leftrightarrow \forall y P(x,y)$.

c) $\forall x \exists y Q(x,y) \vee (\exists x \forall y P(x,y) \wedge \neg \exists x \exists y P(x,y))$.

d) $\neg(\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists x \exists y R(x,y)) \wedge \forall x \neg \exists y Q(x,y)$.

Ratk.
Muunnettaessa predikaattilogiikan lauseita normaalimuotoihin, tuli noudattaa seuraavaa algoritmia:

- Poistetaan konnektiivit $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$.
- Negaatiot sisään kvanttorit ulos.
- Distribuutiosäännöillä haluttu lopullinen muoto (KNM tai DNM).

a)

$$
\begin{aligned}
&\forall y(\exists x P(x,y) \rightarrow Q(y,z)) \wedge \exists y(\forall x R(x,y) \vee Q(x,y)) \\
\equiv &\forall y(\neg \exists x P(x,y) \vee Q(y,z)) \wedge \exists y(\forall x R(x,y) \vee Q(x,y)) \\
\equiv &\forall y(\forall x \neg P(x,y) \vee Q(y,z)) \wedge \exists y(\forall x R(x,y) \vee Q(x,y)) \\
\equiv &\exists y_1(\forall y(\forall x \neg P(x,y) \vee Q(y,z)) \wedge (\forall x R(x,y_1) \vee Q(x,y_1))) \\
\equiv &\exists y_1 \forall y_2((\forall x \neg P(x,y_2) \vee Q(y_2,z)) \wedge (\forall x R(x,y_1) \vee Q(x,y_1))) \\
\equiv &\exists y_1 \forall y_2 \forall x_1 \forall x_2((\neg P(x_1,y_2) \vee Q(y_2,z)) \wedge (R(x_2,y_1) \vee Q(x,y_1)))
\end{aligned}
$$

Nyt havaitaan, että kvanttoreita sisältämätön osa on KNM:n edellyttämää muotoa. Skolemoinnissa uloimmat eksistenssikvanttorit korvataan vakioilla, ja universaalikvanttoreiden sisällä olevat Skolem-funktioilla. Tässä saadaan seuraava lause:

$$
\forall y_2 \forall x_1 \forall x_2((\neg P(x_1,y_2) \vee Q(y_2,z)) \wedge (R(x_2,c) \vee Q(x,c)))
$$

c)

$$
\begin{aligned}
&\forall x \exists y Q(x,y) \vee (\exists x \forall y P(x,y) \wedge \neg \exists x \exists y P(x,y)) \\
\equiv &\forall x \exists y Q(x,y) \vee (\exists x \forall y P(x,y) \wedge \forall x \forall y \neg P(x,y)) \\
\equiv &\forall x_1 \exists y_1 Q(x_1,y_1) \vee \exists x_2 \forall y_2 \forall x_3 \forall y_3 (P(x_2,y_2) \wedge \neg P(x_3,y_3))) \\
\equiv &\exists x_2 \forall x_1 \exists y_1 \forall y_2 \forall x_3 \forall y_3 (Q(x_1,y_1) \vee (P(x_2,y_2) \wedge \neg P(x_3,y_3)))
\end{aligned}
$$

Lause on nyt nk. Prenex-normaalimuodossa, josta voidaan jatkaa konjunktiiviviseen normaalimuotoon.

$$\exists x_2 \forall x_1 \exists y_1 \forall y_2 \forall x_3 \forall y_3 ((Q(x_1,y_1) \vee P(x_2,y_2)) \wedge (Q(x_1,y_1) \vee \neg P(x_3,y_3)))$$

Skolemoinnissa x_2 korvataan vakiolla c ja y_1 lausutaan x_1:n funktiona.

$$\forall x_1 \forall y_2 \forall x_3 \forall y_3 ((Q(x_1,f(x_1)) \vee P(c,y_2)) \wedge (Q(x_1,f(x_1)) \vee \neg P(x_3,y_3)))$$

3. Johda muista kvanttorisäännöistä säännöt, joilla kvanttorit $\forall x$ ja $\exists x$ tuoda allaolevista lausemuodoista ulos, s.e. sulkujen sisälle jäävä alikaava säilyy muodoltaan implikaationa.

a) $\vec{Q}y\ (\forall x \phi(x) \to \psi)$

b) $\vec{Q}y\ (\exists x \phi(x) \to \psi)$

c) $\vec{Q}y\ (\phi \to \forall x \psi(x))$

d) $\vec{Q}y\ (\phi \to \exists x \psi(x))$

Ratk.
Tehtävässä sovelletaan jo aikaisemmin tutuksi käyneitä normaalimuotosääntöjä.

a)

$$\begin{aligned}
&\vec{Q}y\ (\forall x \phi(x) \to \psi)\\
\equiv &\vec{Q}y\ (\neg\forall x \phi(x) \vee \psi)\\
\equiv &\vec{Q}y\ (\exists x \neg\phi(x) \vee \psi)\\
\equiv &\vec{Q}y\ \exists x_1 (\neg\phi(x_1) \vee \psi)\\
\equiv &\vec{Q}y\ \exists x_1 (\phi(x_1) \to \psi)
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\vec{Q}y\ (\phi \to \forall x \psi(x))\\
\equiv &\vec{Q}y\ (\neg\phi \vee \forall x \psi(x))\\
\equiv &\vec{Q}y\ \forall x_1 (\neg\phi \vee \psi(x_1))\\
\equiv &\vec{Q}y\ \forall x_1 (\neg\phi \to \psi(x_1))
\end{aligned}$$

Säännönmukaisuutena voidaan havaita, että mikäli kvantifiointi on implikaation vasemmalla puolella, muuttuu kvanttori. Oikealla puolella se säilyy.

4. Muunna seuraavat lauseet klausuulimuotoon:

a) $\neg\exists x((P(x)\to P(a))\wedge(P(x)\to P(b)))$,

b) $\forall y\exists x P(x,y)$,

c) $\neg\forall y\exists x G(x,y)$ ja

d) $\exists x\forall y\exists z(P(x,z)\vee P(z,y)\to G(x,y))$.

Ratk.

a) Lause $\neg\exists x((P(x)\to P(a))\wedge(P(x)\to P(b)))$:
Eliminoidaan implikaatiot: $\neg\exists x((\neg P(x)\vee P(a))\wedge(\neg P(x)\vee P(b)))$
Viedään $\neg$ kvanttorin $\exists x$ sisään:
$\forall x\neg((\neg P(x)\vee P(a))\wedge(\neg P(x)\vee P(b)))$
Viedään negaatiot lausekkeiden sisään:
$\forall x((P(x)\wedge\neg P(a))\vee(P(x)\wedge\neg P(b)))$
Tuodaan $P(x)$ ulos: $\forall x(P(x)\wedge(\neg P(a)\vee\neg P(b)))$
Jätetään universaalikavanttorit pois: $P(x)\wedge(\neg P(a)\vee\neg P(b))$
Muodostetaan klausuuliesitys: $\{\{P(x)\},\ \{\neg P(a),\neg P(b)\}\}$

b) Lause $\forall y\exists x P(x,y)$:
Skolemointi: $\forall y P(f(y),y)$
Jätetään universaalikavanttorit pois: $P(f(y),y)$
Muodostetaan klausuuliesitys: $\{\{P(f(y),y)\}\}$

c) Lause $\neg\forall y\exists x G(x,y)$:
Viedään $\neg$ kvanttorin $\forall y$ sisään: $\exists y\neg\exists x G(x,y)$
Viedään $\neg$ kvanttorin $\exists x$ sisään: $\exists y\forall x\neg G(x,y)$
Skolemointi: $\forall x\neg G(x,c)$
Jätetään universaalikavanttorit pois: $\neg G(x,c)$
Muodostetaan klausuuliesitys: $\{\{\neg G(x,c)\}\}$

d) Lause $\exists x\forall y\exists z(P(x,z)\vee P(z,y)\to G(x,y))$:
Eliminoidaan implikaatio: $\exists x\forall y\exists z(\neg(P(x,z)\vee P(z,y))\vee G(x,y))$
Viedään negaatiot lausekkeen sisään:
$\exists x\forall y\exists z((\neg P(x,z)\wedge\neg P(z,y))\vee G(x,y))$
Viedään $G(x,y)$ lausekkeen sisään:
$\exists x\forall y\exists z((\neg P(x,z)\vee G(x,y))\wedge(\neg P(z,y)\vee G(x,y)))$
Skolemointi: $\forall y\exists z((\neg P(c,z)\vee G(c,y))\wedge(\neg P(z,y)\vee G(c,y)))$
Skolemointi: $\forall y((\neg P(c,f(y))\vee G(c,y))\wedge(\neg P(f(y),y)\vee G(c,y)))$
Jätetään universaalikvanttorit pois:
$(\neg P(c,f(y))\vee G(c,y))\wedge(\neg P(f(y),y)\vee G(c,y))$
Muodostetaan klausuuliesitys:
$\{\{\neg P(c,f(y)),G(c,y)\},\ \{\neg P(f(y),y),G(c,y)\}\}$

5. *Suunnattu* graafi koostuu joukosta solmuja ja solmujen välisistä *suunnatuista* kaarista. Oletetaan, että solmut on esitetty vakiosymbolien $\{a, b, \ldots\}$ avulla ja kaaret kaksipaikkaisen predikaatin $K(x, y)$ = "solmusta x on kaari solmuun y" avulla.

1. Määrittele predikaatit $R_n(x, y)$ = "solmusta x on kaarien suuntainen reitti solmuun y siten, että reitillä on n kappaletta kaaria", kun n saa arvot $0, 1, 2, \ldots, k$. Kuvaa allaoleva graafi käyttäen predikaattia K.

$$a \quad \overset{\longrightarrow}{\longleftarrow} \quad b \quad \longrightarrow \quad c$$

2. Osoita semanttisella taululla, että laatimastasi kuvauksesta sekä predikaattien R_2 ja R_3 määritelmistä seuraa loogisesti

$$\exists x(R_2(x, x) \wedge R_3(x, c)).$$

Ratk.

a) Määritellään predikaatit $R_n(x, y)$ seuraavasti:

$$\begin{gathered}
\forall x R_0(x, x) \\
\forall x \forall y \forall z(R_0(x, y) \wedge K(y, z) \rightarrow R_1(x, z)) \\
\forall x \forall y \forall z(R_1(x, y) \wedge K(y, z) \rightarrow R_2(x, z)) \\
\vdots \\
\forall x \forall y \forall z(R_{k-1}(x, y) \wedge K(y, z) \rightarrow R_k(x, z))
\end{gathered}$$

Säännöt siis tarkoittavat, että kaikista solmuista on nollan askeleen mittainen reitti itseensä, ja mikäli solmusta x on $k-1$:n askeleen mittainen reitti solmuun y ja solmusta y on kaari solmuun z, voidaan kyseinen kaari liittää reitin jatkoksi ja saada k:n askeleen reitti solmusta x solmuun z.

Graafi:

$$a \quad \overset{\longrightarrow}{\longleftarrow} \quad b \quad \longrightarrow \quad c$$

voidaan esittää kaarirelaation avulla seuraavasti:

$$\begin{gathered}
K(a, b) \\
K(b, a) \\
K(b, c)
\end{gathered}$$

b) Ennen taulutodistuksen laadintaa kannattaa miettiä, mitä kysely tarkoittaa, ja tekemällä todistuksen sen pohjalta. Kyselyssä väitetään, että on olemassa solmu, josta lähtee kahden askeleen mittainen silmukka takaisin itseensä, ja josta pääsee kolmella askeleella solmuun c. Tarkastelemalla graafia huomataan, että solmu b täyttää tämän ehdon. Todistus etenee siten seuraavasti:

1. Todistetaan, että solmusta b on yhden askeleen pituinen reitti solmuun a.
2. Todistetaan, että solmusta b on kahden askeleen pituinen reitti takaisin itseensä.
3. Todistetaan, että solmusta b on kolmen askeleen pituinen reitti solmuun c.

Mikäli tätä strategiaa ei noudata, todistuksesta voi tulla huomattavan hankala.

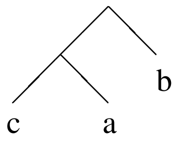
$$
\begin{array}{c}
1.\ T(\forall x R_0(x,x)) \\
| \\
2.\ T(\forall x \forall y \forall z (R_0(x,y) \wedge K(y,z) \rightarrow R_1(x,z))) \\
| \\
3.\ T(\forall x \forall y \forall z (R_1(x,y) \wedge K(y,z) \rightarrow R_2(x,z))) \\
| \\
4.\ T(\forall x \forall y \forall z (R_2(x,y) \wedge K(y,z) \rightarrow R_3(x,z))) \\
| \\
5.\ T(K(a,b)) \\
| \\
6.\ T(K(b,a)) \\
| \\
7.\ T(K(b,c)) \\
| \\
8.\ E(\exists x (R_2(x,x) \wedge R_3(x,c))) \\
| \\
9.\ E(R_2(b,b) \wedge R_3(b,c)),\ 8.\ x/b \\
| \\
10.\ T(R_0(b,b) \wedge K(b,a) \rightarrow R_1(b,a)),\ 2.\ x/b, y/b, z/a \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
11.\ E(R_0(b,b) \wedge K(b,a)),\ 10. \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
12.\ E(R_0(b,b)),\ 11. \\
| \\
13.\ T(R_0(b,b)),\ 1. \\
\otimes
\end{array}
&
\begin{array}{c}
12.\ E(K(b,a)),\ 11. \\
\otimes
\end{array}
\end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
11.\ T(R_1(b,a)),\ 10.
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

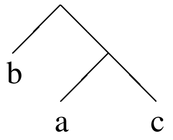
Tarkastellaan asemointisyistä alipuuta solmusta 11 erikseen.

- $11.\ T(R_1(b,a))$
  - $12.\ T(R_1(b,a) \wedge K(a,b) \to R_2(b,b)), 3.\ x/b, y/a, z/b$
    - $13.\ E(R_1(b,a) \wedge K(a,b)), 12.$
      - $12.\ E(R_1(b,a)), 13.$ $\otimes$
      - $12.\ E(K(a,b)), 13.$ $\otimes$
    - $13.\ T(R_2(b,b)), 12.$
      - $14.\ T(R_2(b,b) \wedge K(b,c) \to R_3(b,c)), 3.\ x/b, y/b, z/c$
        - $15.\ E(R_2(b,b) \wedge K(b,c)),\ 14.$
          - $16.\ E(R_2(b,b)),\ 15.$ $\otimes$
          - $16.\ E(K(b,c)),\ 15.$ $\otimes$
        - $15.\ T(R_3(b,c)),\ 14.$
          - $E(R_2(b,b)),\ 9.$ $\otimes$
          - $E(R_3(b,c)),\ 9.$ $\otimes$

Koko taulu saatiin ristiriitaikseksi ja looginen seuraavuus täten osoitettua.

6. Esitetään binääripuut kaksipaikkaisen funktiosymbolin s (sisäsolmut) ja yksipaikkaisen funktiosymbolin l (lehtisolmut) avulla. Näin oheisen kuvan ylempi puu saa termiesityksen $s(s(l(c),l(a)),l(b))$.





a) Tarkoittakoon predikaatti PK(x, y), että binääripuu x on binääripuun y peilikuva. Määrittele predikaatti PK predikaattilogiikan lausein siten, että pystyt päättelemään, ovatko mitkä tahansa kaksi yllä annetun esitystavan mukaista binääripuuta toistensa peilikuvia.

b) Osoita semanttisella taululla, että ylempi binääripuu on alemman binääripuun peilikuva.

Ratk.
Määritellään predikaatti PK seuraavasti:

$$\forall x PK(l(x), l(x))$$
$$\forall x \forall y \forall v \forall w (PK(x, v) \land PK(y, w) \to PK(s(x, y), s(w, v)))$$

Siis:

- lehtisolmut ovat itsensä peilikuvia
- sisäsolmut $s(x, y)$ käsitellään siten, että ensin muodostetaan alipuiden x ja y peilikuvat ja sitten nämä liitetään yhteen käänteiseen järjestykseen $s(w, v)$.

Todistetaan näillä lauseilla, että:

$$PK(s(s(l(c), l(a)), l(b)), s(l(b), s(l(a), l(c))))$$

Havaitaan, että puusta (seuraavalla sivulle) tulee ristiriitainen, joten esitetty lause on PK:n määritelmän looginen seuraus.

$$T\forall x PK(l(x),l(x))$$

$$T\forall x\forall y\forall z\forall v(PK(x,y)\wedge PK(z,v)\to PK(s(x,z),s(v,y)))$$

$$EPK(s(s(l(c),l(a)),l(b)),s(l(b),s(l(a),l(c))))$$

$$TPK(l(a),l(a))$$

$$TPK(l(b),l(b))$$

$$TPK(l(c),l(c))$$

$$T\forall y\forall z\forall v(PK(s(l(c),l(a)),y)\wedge PK(z,v)\to PK(s(s(l(c),l(a)),z),s(v,y)))$$

$$T\forall z\forall v(PK(s(l(c),l(a)),s(l(a),l(c)))\wedge PK(z,v)\to PK(s(s(l(c),l(a)),z),s(v,s(l(a),l(c)))))$$

$$T\forall v(PK(s(l(c),l(a)),s(l(a),l(c)))\wedge PK(l(b),v)\to PK(s(s(l(c),l(a)),l(b)),s(v,s(l(a),l(c)))))$$

$$T(PK(s(l(c),l(a)),s(l(a),l(c)))\wedge PK(l(b),l(b))\to PK(s(s(l(c),l(a)),l(b)),s(l(b),s(l(a),l(c)))))$$

$$E(PK(s(l(c),l(a)),s(l(a),l(c)))\wedge PK(l(b),l(b))) \qquad TPK(s(s(l(c),l(a)),l(b)),s(l(b),s(l(a),l(c)))) \; \otimes$$

$$EPK(s(l(c),l(a)),s(l(a),l(c))) \qquad EPK(l(b),l(b)) \; \otimes$$

$$T\forall y\forall z\forall v(PK(l(c),y)\wedge PK(z,v)\to PK(s(l(c),z),s(v,y)))$$

$$T\forall z\forall v(PK(l(c),l(c))\wedge PK(z,v)\to PK(s(l(c),z),s(v,l(c))))$$

$$T\forall v(PK(l(c),l(c))\wedge PK(l(a),v)\to PK(s(l(c),l(a)),s(v,l(c))))$$

$$T(PK(l(c),l(c))\wedge PK(l(a),l(a))\to PK(s(l(c),l(a)),s(l(a),l(c))))$$

$$E(PK(l(c),l(c))\wedge PK(l(a),l(a))) \qquad TPK(s(l(c),l(a)),s(l(a),l(c))) \; \otimes$$

$$EPK(l(c),l(c)) \; \otimes \qquad EPK(l(a),l(a)) \; \otimes$$