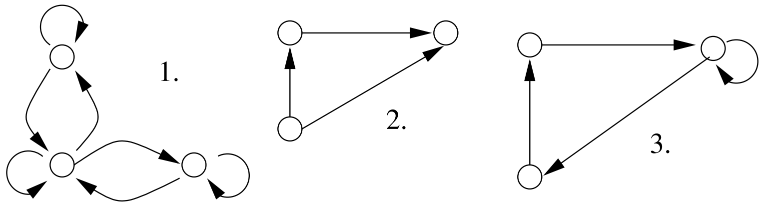
T-79.144 **Syksy 2003**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 8 (opetusmoniste, kappaleet 2.3 - 3.4)
28 – 31.10.2003

1. Olkoon R kaksipaikkainen predikaattisymboli, jonka tulkintana on relaatio $R^{\mathcal{S}} \subseteq U \times U$ (joukko U on struktuurin $\mathcal{S}$ universumi). Alla on taulukko lauseista, jotka määrittelevät relaatiolle $R^{\mathcal{S}}$ erilaisia ominaisuuksia.

Ominaisuus	Määritelmä
refleksiivisyys	$\forall x R(x,x)$
irrefleksiivisyys	$\forall x \neg R(x,x)$
symmetrisyys	$\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$
asymmetrisyys	$\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$
transitiivisyys	$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$
sarjallisuus	$\forall x \exists y R(x,y)$

Olkoon universumi U kaikkien ihmisten joukko. Anna esimerkkejä relaatioista $R^{\mathcal{S}}$, $(\emptyset \subset R^{\mathcal{S}} \subset U^2)$, joilla on yllä määriteltyjä ominaisuuksia.

Allaolevat kolme graafia pyrkivät selventämään eri relaatioiden ominaisuuksia. Tässä solmut ovat struktuurin alkioita, ja solmuja yhdistää kaari, mikäli $R(x,y)$ on tosi, kun $x \in U, y \in U$. Loogisia rakenteita havainnollistetaan aina silloin tällöin niitä vastaavien graafien avulla.



Refleksiivisyys $(\forall x R(x,x))$ tarkoittaa sitä, että graafin kaikista solmuista on kaari takaisin itseensä, ja irrefleksiivisyys $(\forall x \neg R(x,x))$ vastaavasti sitä, että yhdessäkään solmussa ei ole itseään osoitavaa kaarta. Graafeista ensimmäinen on refleksiivinen, toinen irrefleksiivinen ja kolmas ei ole kumpaakaan.

Symmetrisyys $(\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x)))$ tarkoittaa sitä, että aina mikäli solmusta x on kaari solmuun y, graafissa on myös kaari y:stä x:ään. Asymmetrisellä $(\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x)))$ graafilla ei ole yhtään paluukaarta. Kuvan graafeista 1. on symmetrinen, 2. asymmetrinen ja 3. ei kumpaakaan.

Transitiivisessa graafissa $(\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)))$ pätee, että mikäli solmusta x päästään kaaria seuraamalla (mahdollisesti muiden solmujen kautta) solmuun y, pääsee solmusta x myös suoraan solmuun y. Kuvan graafeista ainoastaan keskimmäinen on transitiivinen.

Graafin sarjallisuus $(\forall x \exists y R(x,y))$ tarkoittaa sitä, että kaikista solmuista lähtee ainakin yksi kaari. Kuvan graafeista ensimmäinen ja viimeinen ovat sarjallisia.

Ominaisuuksien ihmisten joukossa tapahtuvaa tarkastelua varten määritellään seuraavat relaatiot: $T(x,y)$ (x tuntee y:n), $N(x,y)$ (x on naimisissa y:n kanssa), $V(x,y)$ (y on x:n vanhempi) ja $E(x,y)$ (y on x:n esi-isä). Nämä relaatiot toteuttavat ominaisuuksia seuraavan taulukon mukaisesti.

Relaatio	refl.	irrefl.	symm.	asymm.	trans.	sarj.
tuttu	*		*			*
aviopuoliso		*	*			
vanhempi		*		*		*
esi-isä		*		*	*	*

Koska ihminen tuntee itsensä, ja tutut tuntevat toisensa, on $T(x,y)$ refleksiivinen, symmetrinen ja sarjallinen. Aviopuolisot ovat naimisissa toistensa kanssa, eikä kukaan voi olla naimisissa itsensä kanssa, joten $N(x,y)$ on irrefleksiivinen ja symmetrinen. Vanhemmuus on irrefleksiivinen, asymmetrinen (kukaan ei voi olla oma isovanhempansa) ja sarjallinen (kaikilla on vanhemmat). Esi-isä–relaatio on kuten vanhemmuus, mutta sen lisäksi myös transitiivinen, koska jos Kalle on Pekan esi-isä, ja Pekka Juhan, niin Kalle on myös Juhan esi-isä.

2. Tiedetään, että

(i) kaikki syylliset ovat valehtelijoita,

(ii) ainakin yksi syytetyistä on myös todistaja ja

(iii) yksikään todistaja ei valehtele.

Todista, etteivät kaikki syytetyt ole syyllisiä. Käytä semanttista taulua.

Olkoon predikaatit $G(x)$ (x on syyllinen), $L(x)$ (x on valehtelija), $A(x)$ (x on syytetty) ja $W(x)$ (x on todistaja). Premissit ovat nyt $\forall x(G(x) \rightarrow L(x))$, $\exists x(A(x) \wedge W(x))$ ja $\forall x(W(x) \rightarrow \neg L(x))$. Haluttu johtopäätös on $\neg \forall x(A(x) \rightarrow G(x))$. Taulutodistus on seuraavanalainen.

1. $T(\forall x(G(x) \to L(x)))$
2. $T(\exists x(A(x) \land W(x)))$
3. $T(\forall x(W(x) \to \neg L(x)))$
4. $E(\neg\forall x(A(x) \to G(x)))$

5.$T(\forall x(A(x) \to G(x)))$

6. $T(A(a) \land W(a))$

7. $T(A(a))$
8. $T(W(a))$

9. $T(A(a) \to G(a))$

10. $E(A(a))$ $\otimes$ | 10. $T(G(a))$

11. $T(W(a) \to \neg L(a))$

12. $E(W(a))$ $\otimes$ | 12. $T(\neg L(a))$

13. $E(L(a))$

14. $T(G(a) \to L(a))$

15. $E(G(a))$ $\otimes$ | 15. $T(L(a))$ $\otimes$

3. Tiedetään, että

1) jos tiili on toisen tiilen päällä, se ei ole pöydällä
2) jokainen tiili on pöydällä tai toisen tiilen päällä ja
3) yksikään tiili ei ole sellaisen tiilen päällä, joka edelleen on jonkun tiilen päällä.

Todista semanttisella taululla, että jos tiili on toisen tiilen päällä, niin jälkimmäisen on oltava pöydällä.

Ratk.
Käytetään formalisoinnissa seuraavia predikaatteja:

$$P(x) = \text{“tiili } x \text{ on pöydällä”}.$$
$$Q(x,y) = \text{“tiili } x \text{ on tiilen } y \text{ päällä” ja}$$

Premissijoukko on formalisoituna seuraavanlainen:

$$\{\forall x\,(\exists y\,Q(x,y) \to \neg P(x)),\ \forall x\,(P(x) \vee \exists y\,Q(x,y)),$$
$$\forall x \forall y\,(\exists z\,Q(y,z) \to \neg Q(x,y))\}$$

Haluttu johtopäätös on

$$\forall x \forall y\,(Q(x,y) \to P(y))$$

Taulutodistus:

$$1.\ T(\forall x(\exists y Q(x,y) \to \neg P(x)))$$
$$2.\ T(\forall x(P(x) \vee \exists y Q(x,y)))$$
$$3.\ T(\forall x \forall y(\exists z Q(y,z) \to \neg Q(x,y)))$$
$$4.\ E(\forall x \forall y(Q(x,y) \to P(y)))$$
$$5.\ E(\forall y(Q(c,y) \to P(y)))^{4.\ x/c}$$
$$6.\ E(Q(c,d) \to P(d))^{5.\ y/d}$$
$$7.\ T(Q(c,d))^{6.}$$
$$8.\ E(P(d))^{6.}$$
$$9.\ T(P(d) \vee \exists y Q(d,y))$$

$$\begin{array}{cc}
10.\ T(P(d))^{9.} & 10.\ T(\exists y Q(d,y))^{9.} \\
\otimes & 11.\ T(Q(d,e))^{10.\ y/d} \\
 & 12.\ T(\exists z Q(d,z) \to \neg Q(c,d))^{3.\ x/c, y/d}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
13.\ E(\exists z Q(d,z))^{12.} & 13.\ T(\neg Q(c,d))^{12.} \\
14.\ E(Q(d,e))^{13.\ z/e} & 14.\ E(Q(c,d))^{13.} \\
\otimes & \otimes
\end{array}$$

4. Tutki semanttisella taululla:

a) $\{\forall x \exists y (P(x) \to Q(y)), \forall x P(x)\} \models \forall x Q(x)$.

b) $\{\forall x \forall y (\exists z (R(x,z) \land R(z,y)) \to R(x,y)), R(a,b), R(b,a)\} \models R(a,a)$.

c) $\models \forall x \exists y R(x,y) \to (\forall y (\neg S(y) \to \neg \exists x R(x,y)) \to \exists x S(x))$.

Ratk.

a)

1. $T(\forall x \exists y (P(x) \to Q(y)))$
2. $T(\forall x P(x))$
3. $E(\forall x Q(x))$
4. $E(Q(c))$ 3. x/c
5. $T(P(c))$ 2. x/c
6. $T(\exists y (P(c) \to Q(y)))$ 1. x/c
7. $T(P(c) \to Q(d))$ 6. y/d

Vasen haara: 8. $E(P(c))$ 7. $\otimes$

Oikea haara: 8. $T(Q(d))$ 7.

9. $T(P(d))$ 2. x/d

Taulu näyttää jäävän auki. Tätä voidaan perustella sillä, että aina kun predikaatti Q tulee instantioida, pitää se tehdä uudella vakiolla. Ristiriita edellyttäisi samaa vakiota totena ja epätotena. Avoimesta haarasta voidaan lukea vastaesimerkki, $U = \{1,2\}, c^{\mathcal{S}} = 1,\ d^{\mathcal{S}} = 2,\ P^{\mathcal{S}} = \{1,2\},\ Q^{\mathcal{S}} = \{2\}$. Havaitaan, että vastaesimerkille pätee

$$\mathcal{S} \models \forall x \exists y (P(x) \to Q(y)), \quad \mathcal{S} \models \forall x P(x) \quad \text{ja} \quad \mathcal{S} \not\models \forall x Q(x).$$

b)

$$1.\ T(\forall x \forall y(\exists z(R(x,z) \wedge R(z,y)) \rightarrow R(x,y)))$$

$$2.\ T(R(a,b))$$

$$3.\ T(R(b,a))$$

$$4.\ E(R(a,a))$$

$$5.\ T(\exists z(R(a,z) \wedge R(z,a)) \rightarrow R(a,a)),\ 1.\ x/a, y/a$$

$$6.\ T(R(a,b) \wedge R(b,a) \rightarrow R(a,a)),\ 5.\ z/b$$

$$7.\ E(R(a,b) \wedge R(b,a)),\ 6. \qquad 7.\ T(R(a,a)),\ 6.$$

$$\otimes$$

$$8.\ E(R(a,b)),\ 7. \qquad 8.\ E(R(b,a)),\ 7.$$

$$\otimes \qquad \otimes$$

Kaikki haarat ristiriitaisia, esitetty väite pätee.